Zufallsvariablen rekapituliert

Wolfgang Konen

TH Köln, Campus Gummersbach

April 2016

1 Einleitung

2 Zufallsvariablen

3 Linearität und Varianz

4 Anhang

- Beweis Linearität Erwartungswert, diskret
- Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

Einleitung

Kombinatorik: muss Wahrscheinlichkeit P für jedes Ereignis neu rechnen

- z.B. 6 Richtige, 5 Richtige, 4 ... im Lotto
- $\rightarrow$ mühsam

Einleitung

Kombinatorik: muss Wahrscheinlichkeit P für jedes Ereignis neu rechnen

- z.B. 6 Richtige, 5 Richtige, 4 ... im Lotto
- $\rightarrow$ mühsam

Zufallsvariablen: Über viele Ereignisse gemeinsam nachdenken

- Voraussetzung: Es gibt einen Zahlenwert, den man jedem Ereignis zuordnen kann
- z.B. $x_m = 6, 5, 4, \ldots$ beim Lotto
- $\rightarrow$ einfacher zu rechnen
- $\rightarrow$ geht auch für unendlich viele x_m ($\mathbb{Z}$: abzählbar oder $\mathbb{R}$: überabzählbar viele)

Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret (o.B.d.A. $x_m \in \mathbb{Z}$)	**stetig** ($x_m \in \mathbb{R}$)

Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret (o.B.d.A. $x_m \in \mathbb{Z}$)	**stetig** ($x_m \in \mathbb{R}$)
$w_m = P(X = x_m)$ $= P(x_{m-1} < X \leq x_m)$	$w(t)\Delta t = P(t - \Delta t < X \leq t)$

Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret (o.B.d.A. $x_m \in \mathbb{Z}$)	**stetig** ($x_m \in \mathbb{R}$)
$w_m = P(X = x_m) = P(x_{m-1} < X \leq x_m)$	$w(t)\Delta t = P(t - \Delta t < X \leq t)$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m = 1 \quad (1)$	$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_t w(t)\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = 1 \quad (2)$

Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret	**stetig**
Verteilungsfunktion F	

Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret	**stetig**
Verteilungsfunktion F	
$F(x_m) = P(X \leq x_m) = \sum_{m=-\infty}^{m} w_{m'}$ (3)	$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} w(t')dt'$ (4)

Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret	**stetig**
Verteilungsfunktion F	
$F(x_m) = P(X \leq x_m) = \sum_{m=-\infty}^{m} w_{m'}$ (3)	$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} w(t')dt'$ (4)
Erwartungswert $E(X)$	

Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

diskret	**stetig**
Verteilungsfunktion F	
$F(x_m) = P(X \leq x_m) = \sum_{m=-\infty}^{m} w_{m'}$ (3)	$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} w(t')dt'$ (4)
Erwartungswert $E(X)$	
$E(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m w_m$ (5)	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, w(t)dt$ (6)

Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft $\mu = E(X)$.

Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft $\mu = E(X)$.

Der **diskrete Erwartungswert** $E(X) = \sum_m x_m w_m$ nach Gl. (5) wichtet jeden Wert x_m von X mit seiner Wahrscheinlichkeit w_m.

Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft $\mu = E(X)$.

Der **diskrete Erwartungswert** $E(X) = \sum_m x_m w_m$ nach Gl. (5) wichtet jeden Wert x_m von X mit seiner Wahrscheinlichkeit w_m.

Beispiel: Hat X die Werte $x_m = 0$ und 10 mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 0) = 95\%$ und $P(X = 10) = 5\%$, so ist der Erwartungswert

$$E(X) = 0 \cdot 95\% + 10 \cdot 5\% = 0.5$$

BEACHTE: Auch wenn alle $x_m \in \mathbb{Z}$, so ist i.allg. $E(X) \notin \mathbb{Z}$.

Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft $\mu = E(X)$.

Der **diskrete Erwartungswert** $E(X) = \sum_m x_m w_m$ nach Gl. (5) wichtet jeden Wert x_m von X mit seiner Wahrscheinlichkeit w_m.

Beispiel: Hat X die Werte $x_m = 0$ und 10 mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 0) = 95\%$ und $P(X = 10) = 5\%$, so ist der Erwartungswert

$$E(X) = 0 \cdot 95\% + 10 \cdot 5\% = 0.5$$

BEACHTE: Auch wenn alle $x_m \in \mathbb{Z}$, so ist i.allg. $E(X) \notin \mathbb{Z}$.

Der **stetige Erwartungswert** nach Gl. (6) benutzt das Integral, das der Grenzwert einer Summe mit $\Delta t \to 0$ ist (siehe Gl. (2)).

Linearität Erwartungswert

Folgende Sätze und Definitionen gelten gleichartig für diskrete und stetige Zufallsvariablen:

Satz 10-6 Linearität Erwartungswert

Seien X, Y Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Beweis diskret | Beweis stetig

Varianz einer Zufallsvariablen

Def 10-15

Hat X den Erwartungswert $E(X) = \mu$ so ist die **Varianz** von X:

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel der Varianz: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$.

Varianz einer Zufallsvariablen

Def 10-15

Hat X den Erwartungswert $E(X) = \mu$ so ist die **Varianz** von X:

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel der Varianz: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$.

Die Varianz gibt an, wie sehr die Ergebnisse für X um den Wert $E(X)$ herum streuen: gar nicht (Varianz Null), wenig (Varianz klein) oder viel (Varianz groß).

Varianz einer Zufallsvariablen

Def 10-15

Hat X den Erwartungswert $E(X) = \mu$ so ist die **Varianz** von X:

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel der Varianz: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$.

Die Varianz gibt an, wie sehr die Ergebnisse für X um den Wert $E(X)$ herum streuen: gar nicht (Varianz Null), wenig (Varianz klein) oder viel (Varianz groß).

diskret	stetig
$Var(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x_m - \mu)^2 w_m$	$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 w(t) dt$

Anhang

Beweis Linearität Erwartungswert, diskret

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit Werten x_m, y_n und Wahrscheinlichkeiten $w_m^{(X)}, w_n^{(Y)}$:

1. $$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_m (ax_m + b) w_m^{(X)} \\ &= a\left(\sum_m x_m w_m^{(X)}\right) + b\left(\sum_m w_m^{(X)}\right) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

Beweis Linearität Erwartungswert, diskret

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit Werten x_m, y_n und Wahrscheinlichkeiten $w_m^{(X)}, w_n^{(Y)}$:

1. $$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_m (ax_m + b) w_m^{(X)} \\ &= a\left(\sum_m x_m w_m^{(X)}\right) + b\left(\sum_m w_m^{(X)}\right) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_n \sum_m (x_m + y_n) w_m^{(X)} w_n^{(Y)} \\ &= \left(\sum_m x_m w_m^{(X)}\right)\left(\sum_n w_n^{(Y)}\right) + \left(\sum_m w_m^{(X)}\right)\left(\sum_n y_n w_n^{(Y)}\right) \\ &= E(X)\cdot 1 + 1 \cdot E(Y) \end{aligned}$$

Zurück

Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

Seien X, Y stetige Zufallsvariablen mit Werten t, u und Wahrscheinlichkeiten $w_X(t), w_Y(u)$:

1. ... (als Übung)

Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

Seien X, Y stetige Zufallsvariablen mit Werten t, u und Wahrscheinlichkeiten $w_X(t), w_Y(u)$:

1. ... (als Übung)
2. $$\begin{aligned} & E(X+Y) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(t+u)w_X(t)w_Y(u)dtdu \\ = & \left(\int_{-\infty}^{\infty} tw_X(t)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_Y(u)\right) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} w_X(t)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} uw_Y(u)\right) \\ = & E(X)\cdot 1 + 1\cdot E(Y) \end{aligned}$$

Zurück