Zufallsvariablen rekapituliert

Wolfgang Konen

TH Köln, Campus Gummersbach

April 2016

1 Einleitung

2 Zufallsvariablen

3 Linearität und Varianz

4 Anhang

- Beweis Linearität Erwartungswert, diskret
- Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

Einleitung

Kombinatorik: muss Wahrscheinlichkeit P für jedes Ereignis neu rechnen

- z.B. 6 Richtige, 5 Richtige, 4 ... im Lotto
- → mühsam

Zufallsvariablen: Über viele Ereignisse gemeinsam nachdenken

- Voraussetzung: Es gibt einen Zahlenwert, den man jedem Ereignis zuordnen kann
- z.B. $x_m = 6, 5, 4, \dots$ beim Lotto
- → einfacher zu rechnen
- → geht auch für unendlich viele x_m
($\mathbb{Z}$: abzählbar oder $\mathbb{R}$: überabzählbar viele)

Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

<p>diskret (o.B.d.A. $x_m \in \mathbb{Z}$)</p>	<p>stetig ($x_m \in \mathbb{R}$)</p>
$w_m = P(X = x_m)$ $= P(x_{m-1} < X \leq x_m)$	$w(t)\Delta t =$ $P(t - \Delta t < X \leq t)$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m = 1 \quad (1)$	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_t w(t)\Delta t =$ $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = 1 \quad (2)$

Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

diskret	stetig
Verteilungsfunktion F	
$F(x_m) = P(X \leq x_m)$ $= \sum_{m=-\infty}^m w_{m'} \quad (3)$	$F(t) = P(X \leq t)$ $= \int_{-\infty}^t w(t') dt' \quad (4)$
Erwartungswert $E(X)$	
$E(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m w_m \quad (5)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t w(t) dt \quad (6)$

Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft $\mu = E(X)$.

Der **diskrete Erwartungswert** $E(X) = \sum_m x_m w_m$ nach Gl. (5) wichtet jeden Wert x_m von X mit seiner Wahrscheinlichkeit w_m .

Beispiel: Hat X die Werte $x_m = 0$ und 10 mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 0) = 95\%$ und $P(X = 10) = 5\%$, so ist der Erwartungswert

$$E(X) = 0 \cdot 95\% + 10 \cdot 5\% = 0.5$$

BEACHTEN: Auch wenn alle $x_m \in \mathbb{Z}$, so ist i.allg. $E(X) \notin \mathbb{Z}$.

Der **stetige Erwartungswert** nach Gl. (6) benutzt das Integral, das der Grenzwert einer Summe mit $\Delta t \rightarrow 0$ ist (siehe Gl. (2)).

Linearität Erwartungswert

Folgende Sätze und Definitionen gelten gleichartig für diskrete und stetige Zufallsvariablen:

Satz 10-6 Linearität Erwartungswert

Seien X, Y Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- 1 $E(aX + b) = aE(X) + b$
- 2 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Beweis diskret

Beweis stetig

Varianz einer Zufallsvariablen

Def 10-15

Hat X den Erwartungswert $E(X) = \mu$ so ist die **Varianz** von X :

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel der Varianz: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Die Varianz gibt an, wie sehr die Ergebnisse für X um den Wert $E(X)$ herum streuen: gar nicht (Varianz Null), wenig (Varianz klein) oder viel (Varianz groß).

diskret	stetig
$\text{Var}(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x_m - \mu)^2 w_m$	$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 w(t) dt$

Anhang

Beweis Linearität Erwartungswert, diskret

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit Werten x_m, y_n und Wahrscheinlichkeiten $w_m^{(X)}, w_n^{(Y)}$:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad E(aX + b) &= \sum_m (ax_m + b)w_m^{(X)} \\
 &= a \left(\sum_m x_m w_m^{(X)} \right) + b \left(\sum_m w_m^{(X)} \right) \\
 &= aE(X) + b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad E(X + Y) &= \sum_n \sum_m (x_m + y_n)w_m^{(X)}w_n^{(Y)} \\
 &= \left(\sum_m x_m w_m^{(X)} \right) \left(\sum_n w_n^{(Y)} \right) + \left(\sum_m w_m^{(X)} \right) \left(\sum_n y_n w_n^{(Y)} \right) \\
 &= E(X) \cdot 1 + 1 \cdot E(Y)
 \end{aligned}$$

Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

Seien X, Y stetige Zufallsvariablen mit Werten t, u und Wahrscheinlichkeiten $w_X(t), w_Y(u)$:

1 ...

2

$$\begin{aligned} & E(X + Y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t + u) w_X(t) w_Y(u) dt du \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} t w_X(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w_Y(u) du \right) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} w_X(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} u w_Y(u) du \right) \\ &= E(X) \cdot 1 + 1 \cdot E(Y) \end{aligned}$$

Zurück