

Übungsblatt 8 Komplexe Zahlen / DGL

In den nachfolgenden Aufgaben bezeichnet i jeweils die imaginäre Einheit.

Aufgabe 8.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie:

- a) $4i - 5 + i(1 - i)$
- b) $|4 + 6i| - |4 - 6i|$
- c) $\frac{3 + 2i}{3 - 2i}$
- d) $\frac{i}{\cos(\frac{\pi}{3}) - i \sin(\frac{\pi}{3})}$

Aufgabe 8.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Ergänzen Sie die jeweils fehlenden Darstellungsformen

	kartesische Form	Polarform	
		trigonom. Form	Exponentialform
a)		$\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})$	
b)			$2e^{i\pi}$
c)	$-i$		
d)			$\sqrt{45}e^{i\varphi}$
e)	$4 - 12i$		

Bei d) sei $\varphi = \arctan(-2) + \pi$

Aufgabe 8.3

Man berechne Real- und Imaginärteil von

$$z = (1 + \sqrt{3} \cdot i)^5$$

Aufgabe 8.4 Graphisches Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen: $z_1 = 1 - 5i$; $z_2 = 4 + 3i$.

- a) Addieren und subtrahieren Sie die Zahlen graphisch in der Gaußschen Zahlenebene. Zeichnen Sie die konjugiert komplexe Zahl zu z_1 ebenfalls ein.
- b) Man stelle z_1 und z_2 in Exponentialform dar. Bilden Sie nun z_1^2 , $\sqrt[3]{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$ ebenfalls mit graphischen Methoden.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 09.05.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 8.5 Additionstheoreme

Leiten Sie die "normalen" Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

aus der Eulerschen Formel (Satz S 11-4) her.

Aufgabe 8.6 Lösung algebraischer Gleichungen

Man bestimme für Z alle Lösungen $Z_k \in \mathbf{C}$ in kartesischer Form.

Zeichnen Sie die $Z_k \in \mathbf{C}$ in der komplexen Ebene!

a) $z^6 - 64 = 0$

b) $(2 + 2\sqrt{3} \cdot i)z = 8e^{i \cdot \pi}$

c) $z^2 = i$

Aufgabe 8.7

λ sei eine beliebige reelle Zahl. Bestimmen Sie die zwei komplexen Lösungen der folgenden Gleichung mittels quadratischer Ergänzung:

$$z^2 - (\lambda - 2i)z - (1 + \lambda i) = 0$$

Ermitteln Sie Real- und Imaginärteile von $Z_{1,2} \in \mathbf{C}$. Stellen Sie beide Lösungen auch in der Exponentialform $Z = r \cdot e^{i\varphi}$ dar.

Aufgabe 8.8 DGL mit nur einem Ableitungsterm

Die Beschleunigung einer Kugel in einem Computerspiel sei gegeben durch die Differentialgleichung $\ddot{s}(t) = 2t$

- Interpretieren Sie die Differentialgleichung (Ordnung, explizit/implizit, homogen/inhomogen), jeweils mit einem Begründungssatz.
- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wieviel freie Parameter hat sie?
- Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen $s(0) = 5$, $\dot{s}(0) = 3$.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 09.05.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 8.9 Anfangswertproblem

Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems (Ansatz: $Ae^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbf{C}$)

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 8.75x(t) = 0, \quad \dot{x}(0) = 8, \quad x(0) = 0$$

Aufgabe 8.10 Lineare DGL

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL (Ansatz: $Ae^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbf{C}$)

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$$