

Vorlesung Mathematik 2

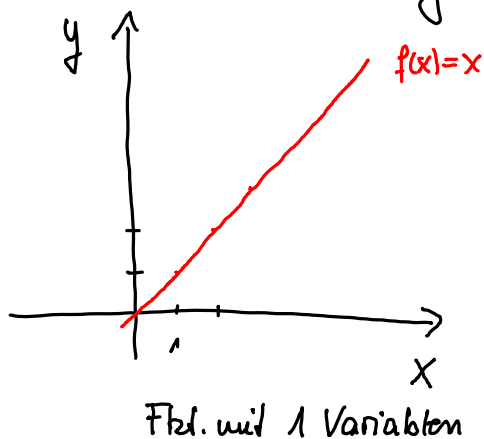
7.6.2017

Mehrdimensionale Analysis

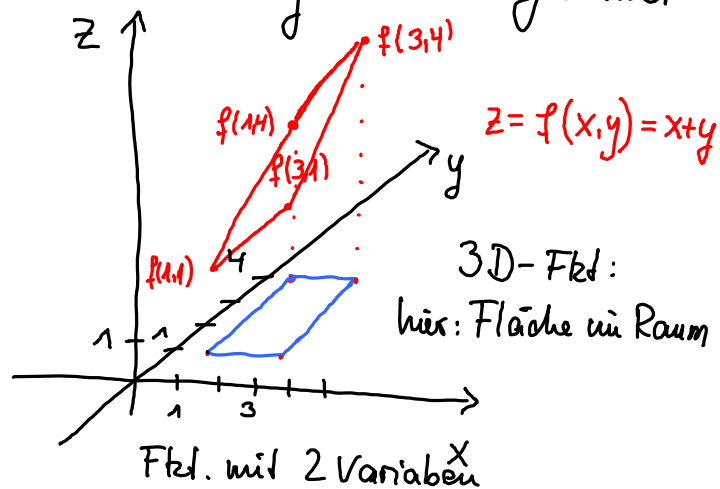
WS : Fkt. mit einer unabhängigen Variablen

Bp: $y = f(x) = x^2 + 1$

Ableitung



Zur Erinnerung : ist ein Grenzwert

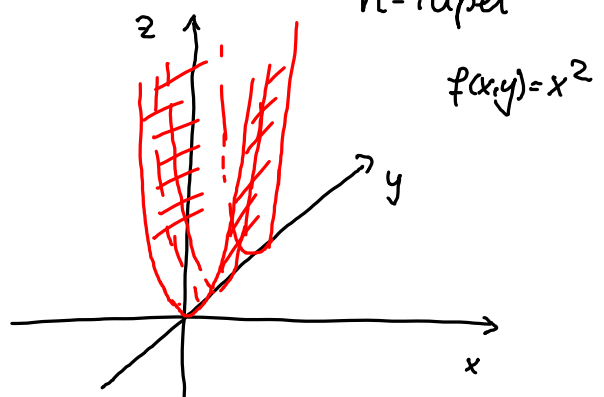
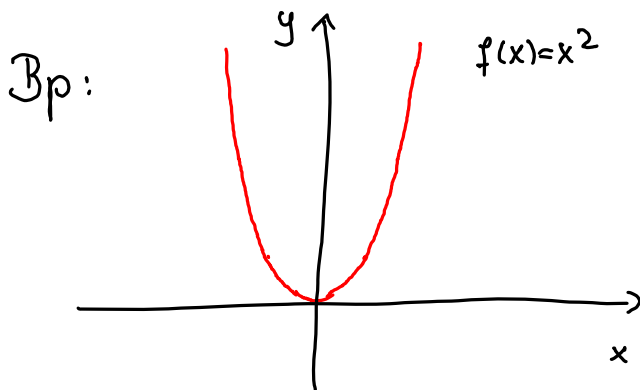


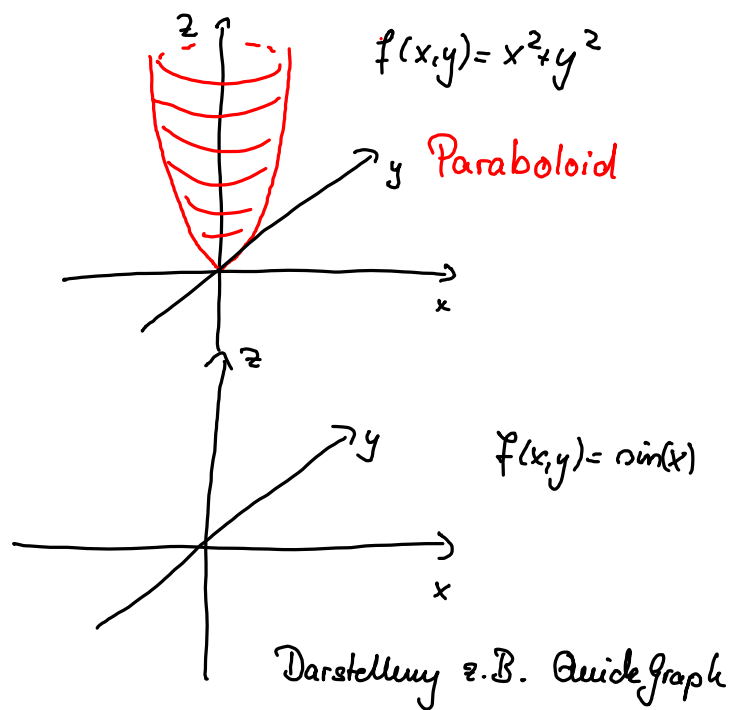
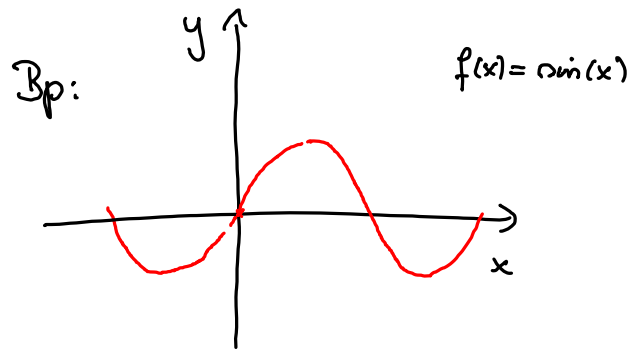
x, y -Ebene ist Definitionsebene

Bp: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ und } 1 \leq y \leq 4\}$

Fkt. mit n Variablen : nicht mehr so einfach vorzustellen

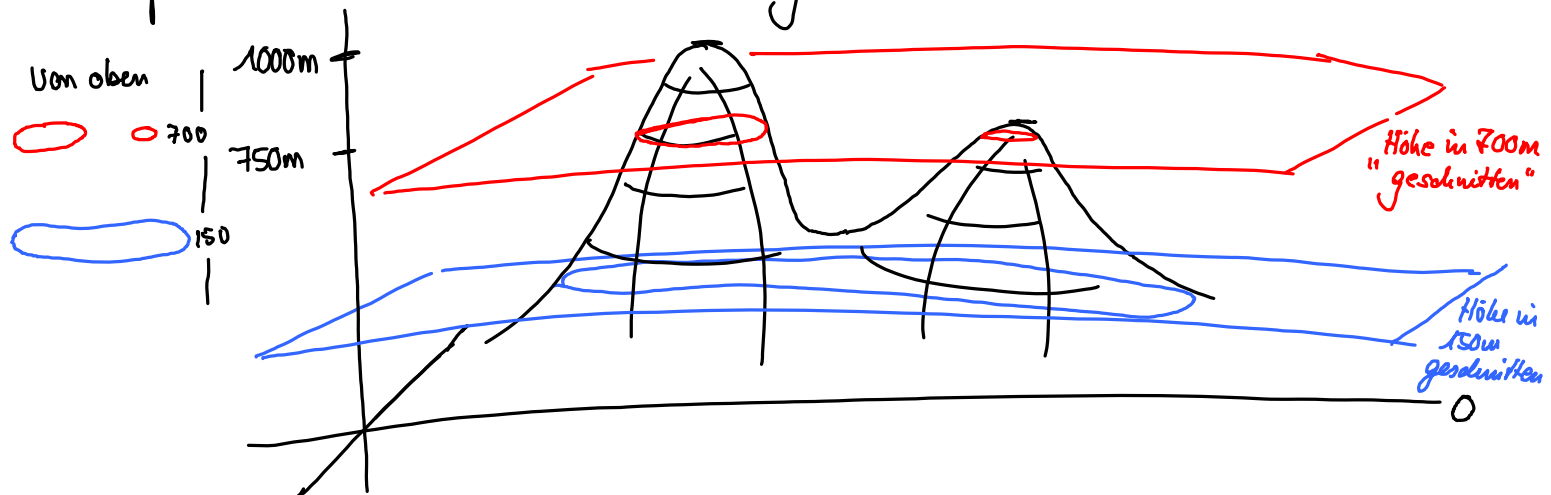
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}^n$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 n -Tupel





Wie sieht $f(x,y) = \sin^2(x) + \cos^2(y)$?

Hilfsmittel zur Veranschaulichung von 3D-Funktionen



Höhenliniendiagramm

$$f(x,y) = z = x^2 + y^2$$

Betrachte $z = x^2 + y^2 = c$

c konstant, $\in \mathbb{R}$

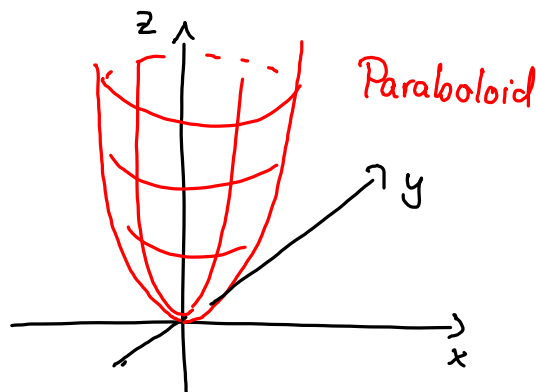
$c = 0, 1, 2, 3$

Höhenlinie in Höhe $c=3$

$$z = x^2 + y^2 = 3$$

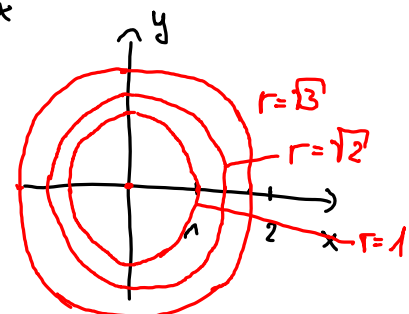
$$z = x^2 + y^2 = 2$$

$$z = x^2 + y^2 = 0$$

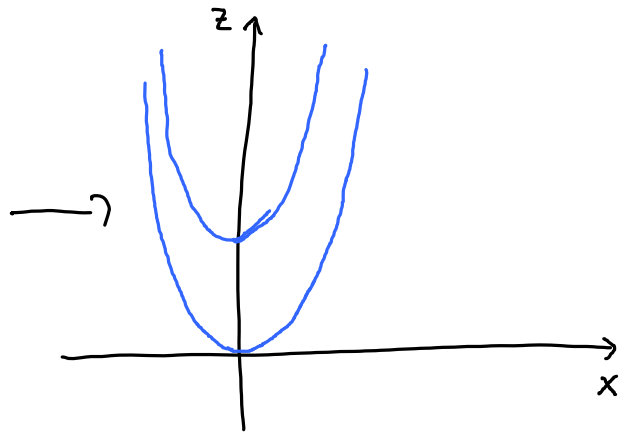
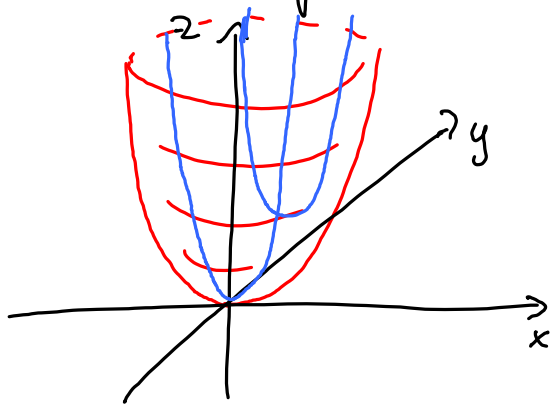


Kreis mit $r = \sqrt{3}$

Kreis mit $r = \sqrt{2}$



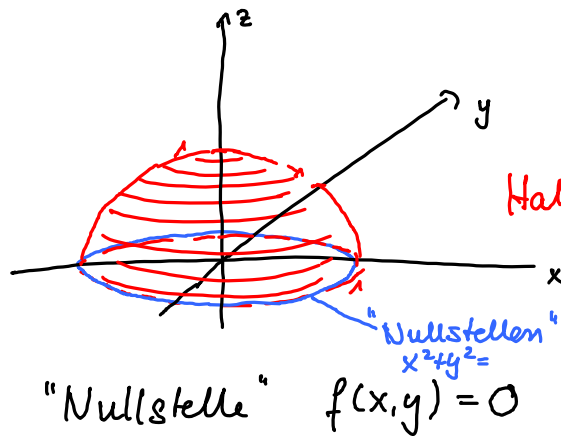
Schnittkurvendiagramme



Funktionseigenschaften von mehrdimensionalen Funktionen

hier: 3D-Fkt.

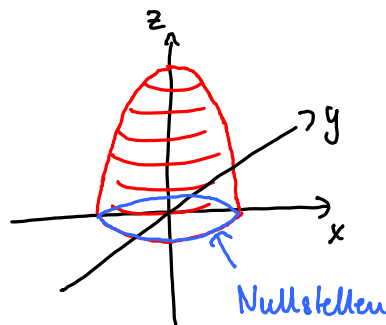
$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$



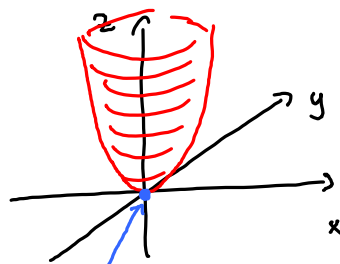
Halbkugel mit $r=1$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{1-x^2-y^2} = 0 \\ 1-x^2-y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}$$

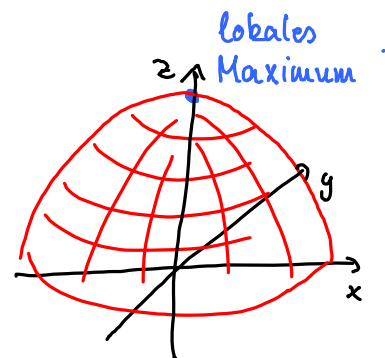
anderes Beispiel:



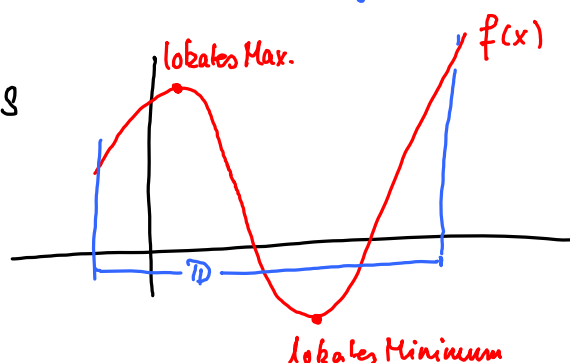
Extremwerte



d.h. auf eine "ε-Umgebung" bezogen



Erinnerung WS



Steigung bei 3D-Funktionen ist immer von der Richtung abhängig, in die man schaut (vgl. Berg in der Natur)

Ableitungen mehrdimensionaler Funktionen

Erinnerung WS: $y = f(x)$

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Bp: $f(x, y) = e^{x \cdot y}$

$$f_x(x, y) = y \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f_y(x, y) = x \cdot e^{x \cdot y}$$