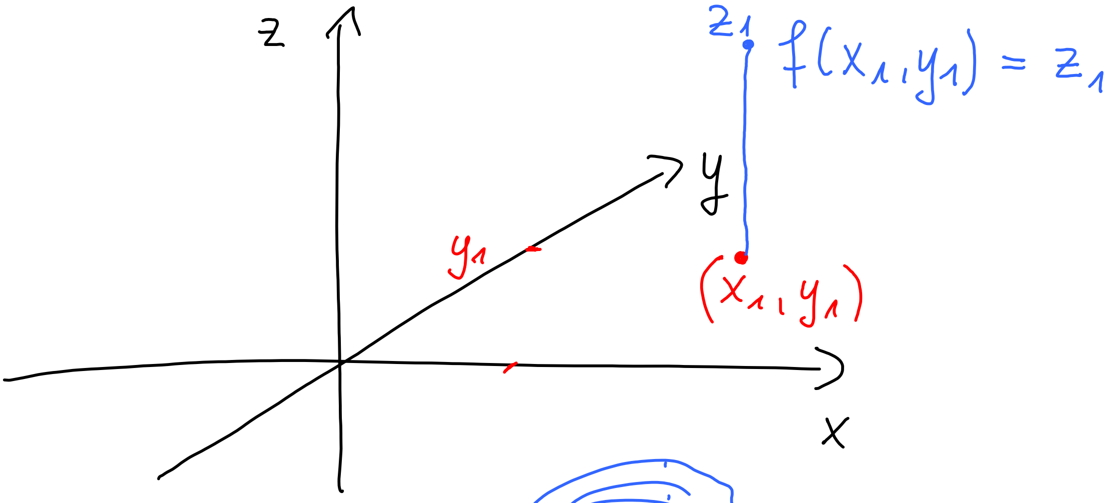
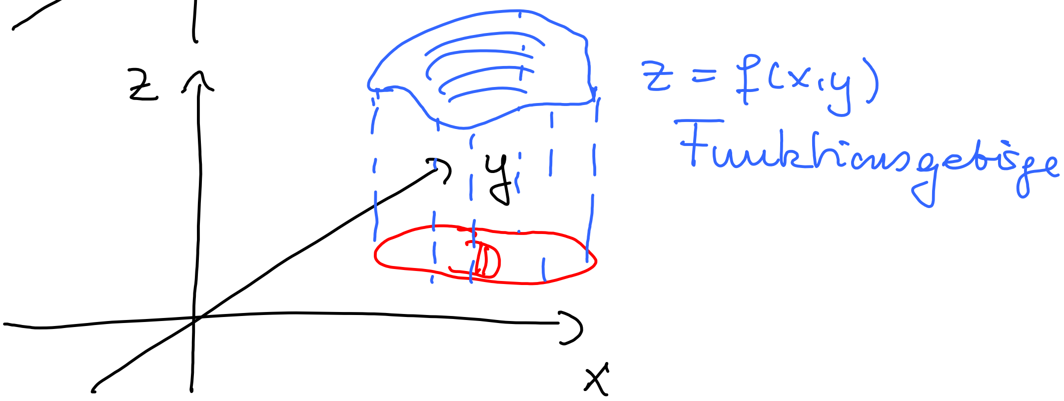
Vorlesung Mathematik 2

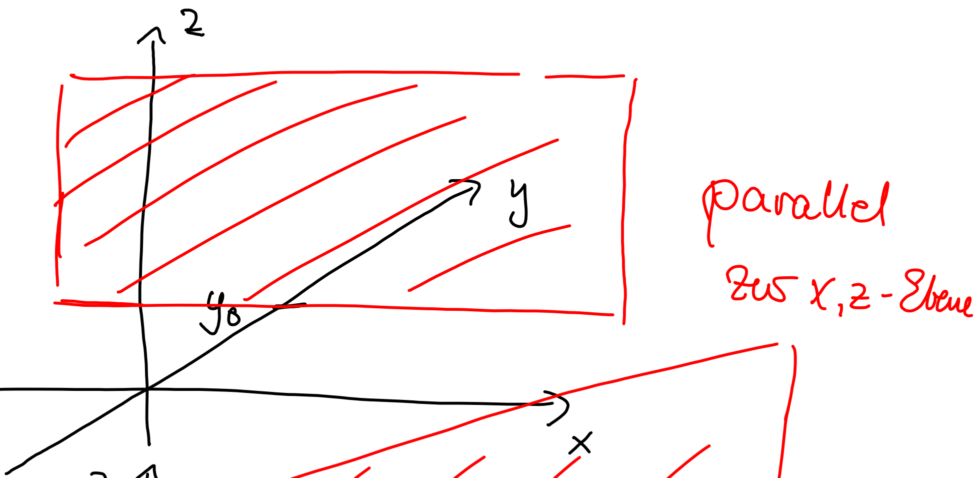
12. 6. 2017

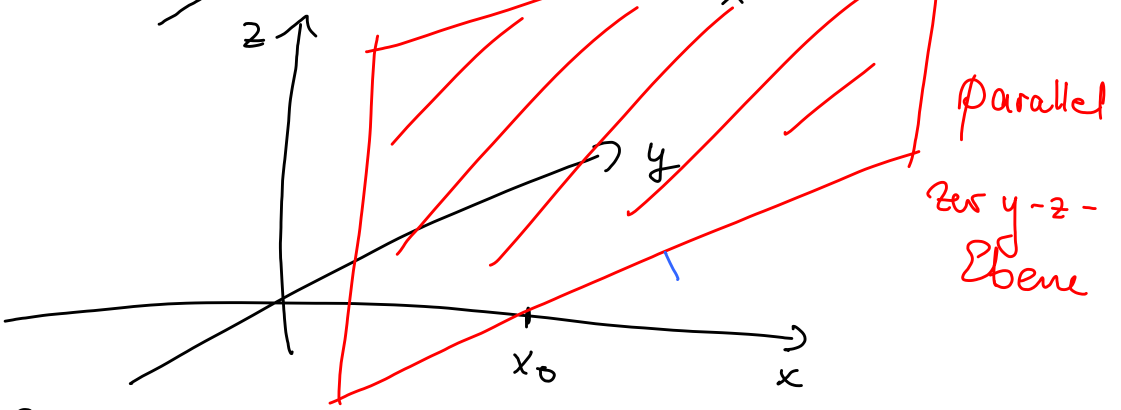
Wdh:





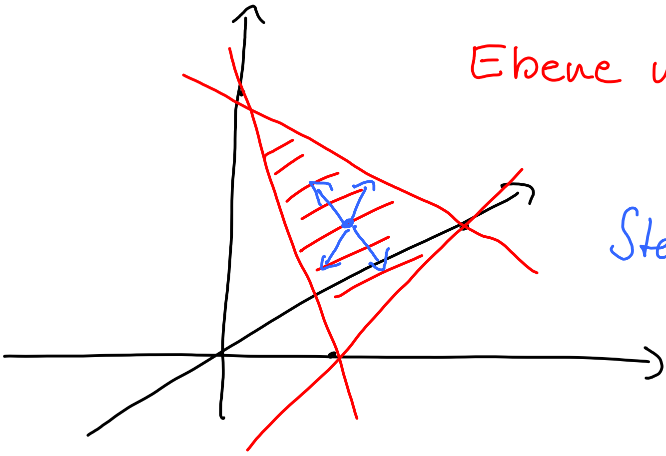
zu Schnittkurven





zum Thema Steigung

Ebene im 3D-Raum



Steigung ist abhängig von einer Richtung

Der Gradient von f $\left(f: D^n \to \mathbb{R} \text{ Fkt mit } n \text{ unabh. Variablen} \right)$

fasst sämtliche partielle Abl. 1. Ordnung in einem "Zeilen-" bzw. "Spaltenvektor" zusammen!

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Merke: Da bei der Berechnung der partiellen Ableitungen alle bis auf eine Variable "konstant" gehalten werden, wird die Differentiation auf die Ableitungen von Fkt. mit 1 Variablen zurückgeführt!

Also nichts Neues ☺

Bp: □ $z = f(x,y) = \boxed{x^n} \cdot y^m$

$f_x(x,y) = n \cdot y^m \cdot x^{n-1}$ $\qquad$ $f_y(x,y) = m \cdot \boxed{x^n} \cdot y^{m-1}$

□ $z = f(x,y) = \boxed{x} \cdot \ln y$

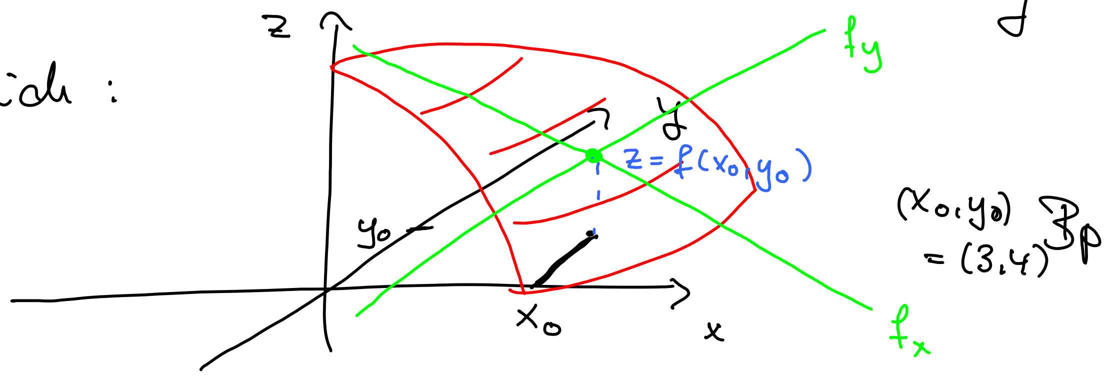
$f_x(x,y) = \ln y$ $\qquad$ $f_y(x,y) = \boxed{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

□ $z = f(x,y) = \boxed{\sin x} \cdot \cos y$

$f_x(x,y) = \cos x \cdot \cos y$ $\qquad$ $f_y(x,y) = \boxed{\sin x}(-\sin y)$

$= -\sin x \cdot \sin y$

Anschaulich:



am Bp $z = f(x,y) = \sin x \cos y$

$x_0 = \pi \qquad y_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{grad} f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} f_x\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \\ f_y\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$f_x = \cos x \cdot \cos y \qquad f_y = -\sin x \sin y$

$$\operatorname{grad} f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\ -\sin \pi \cdot \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bp. $f(x,y) = z = 2x\cdot y - 3x^2 + \frac{1}{y}$

Berechnen Sie den Gradienten im Punkt $(2,1)$

$f_x = 2y - 6x \qquad f_y = 2x - \frac{1}{y^2}$

NB: $\frac{1}{y} = y^{-1}$

$(y^{-1})' = -y^{-2} = \frac{1}{y^2}$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2y - 6x \\ 2x - \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(2,1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 6\cdot 2 \\ 2\cdot 2 - \frac{1}{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bp: $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2x\cdot y} + 3x$

Zu bestimmen: Partielle Ableitungen für $(x,y) = (0,2)$ und $(x,y) = (1,-6)$

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - 2y\cdot e^{2xy} + 3$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x\cdot e^{2xy}$$

$f_x(0,2) = -1 \quad f_y(0,2) = 1$

$$f_x(1,-6) = \frac{2}{37} + 12 \cdot e^{-12} + 3$$

$$\approx 3.0541$$

$$f_y(1,-6) = \frac{-12}{37} - 2 \cdot e^{-12} = -0.3243$$

bitte kontrollieren!

Bp: $u = f(x,y,z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$f_x = 2 \cdot e^{yz} + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$f_y = 2xz \cdot e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$f_z = 2xy \cdot e^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Zu Hause bitte partielle Ableitungen bestimmen:

$$f(x,y) = \frac{e^x \cdot \sin y}{e^y \cdot \cos x}$$

Partiellen Ableitungen höherer Ordnung

$z = f(x,y)$ Fkt. mit 2 Variablen

$f_x(x,y)$ $f_y(x,y)$ 2 partielle Ableitungen 1. Ordnung

f_{xx} f_{xy} f_{yx} f_{yy} 4 partielle Ableitungen 2. Ordnung

zuerst danach wieder x