Vorlesung Mathematik 2
14. 6. 2017

Rückblick WS : 1. Ableitung $f'(x)$ $\qquad y = f(x)$

$f'(x)$ ist wieder Funktion

$\Downarrow$

$f''(x)$ Maß für die Krümmung

$z = f(x,y)$

$z_x \qquad z_y$ — 2 partielle Abl. 1. Ordnung

$\boxed{z_{xx}} \qquad z_{xy} \qquad \boxed{z_{yy}} \qquad z_{yx}$ — 4 partielle Abl. 2. Ordnung

direkte Abl. $\qquad$ direkte Abl.

Krümmung der Schnittkurve $\qquad$ Krümmung der Schnittkurve

Darstellung part. Abl. 1. Ordnung : Gradient ("Vektor")

" " " 2. Ordnung : Hesse-Matrix "Matrix"

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_{12}} & f_{x_{12}} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & f_{x_{22}} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & & \cdots & & f_{x_{nn}} \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix
Jacobische Matrix
Funktionalmatrix

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ Matrix

Üb: Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix allgemein und an der Stelle $(1,-1,-1)$ für folgende Funktion : $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^2 x_3 + x_3$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2 \cdot x_3 \\ x_2^2 + 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad}(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 2x_3 & \boxed{2x_2} \\ \boxed{0} & \boxed{2x_2} & 0 \end{pmatrix} \qquad H(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$ Satz von Schwarz $\quad 3 \times 3$

gemischte Abl. sind gleich!

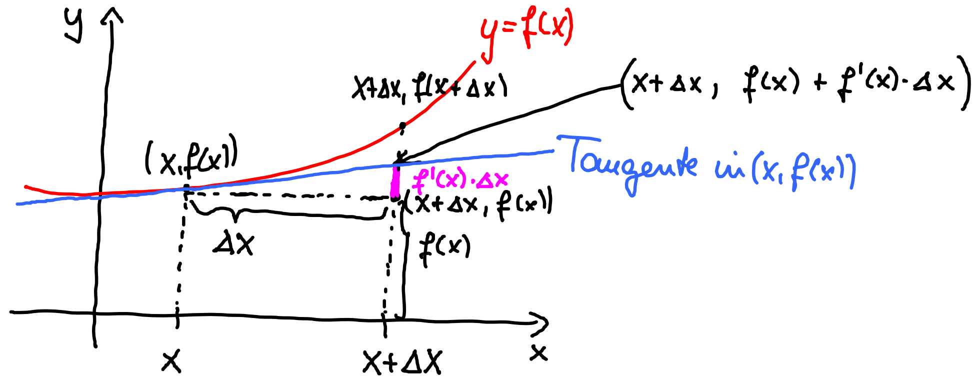
Bp. zum selbständigen Üben: $f(x,y) = \sin(x \cdot y) + y \cdot e^{-x^2}$

gesucht: Gradient und Hesse-Matrix

Das totale Differential einer Fkt. mit n unabh. Variablen

"Linearisierung einer Funktion"

Rückblick: Das Differential einer Fkt. mit einer unabh. Variablen



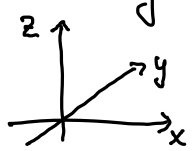
$f(x+\Delta x)$ und $f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ unterscheiden sich umso weniger, je kleiner Δx wird

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

Linearisieren: Kurvenpunktkoordinate wird durch Tangentenkoordinate ersetzt, somit "linearisiert"

Im Grenzübergang $\Delta x \to 0$: $\quad df = f'(x) \cdot dx$

Nun: 3D



aus dem Differential werden nun zwei partielle Differentiale

$$dz_x = f_x \cdot dx$$
$$dz_y = f_y \cdot dy$$

2 Variablen

$$dx_i = f_{x_i}\, dx_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

n Variablen

n partielle Differentiale

Das totale Differential

$$dz = f_x\, dx + f_y\, dy \qquad \text{für } z = f(x,y)$$

2 Variablen

$$dz = f_{x_1}\, dx_1 + f_{x_2}\, dx_2 + \ldots f_{x_n}\, dx_n \qquad \text{für } z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

n Variablen

Linearisierung: Bei geringen Änderungen der Variablen wird durch das totale Differenzial nicht der neue Funktionswert, sondern der zugehörige Wert auf der "Tangentialebene" genommen!

Bp: Gegeben $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $x = 2$ ändere sich in $x_1 = 2.5$
$y = 1$ " " " $y_1 = 1.75$

Berechnen Sie annähernd den Zuwachs der Höhenkoordinate über das totale Differential. Vergleichen Sie mit der tatsächlichen Änderung.

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$
$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = f_x\, dx + f_y\, dy$$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot 0.5 + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot 0.75$$

hier: $\boxed{dz = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1^2} \cdot 0.5 + \frac{2 \cdot 1}{2^2+1^2} \cdot 0.75} = 0.4 + 0.3 = \boxed{0.7}$

$dz = 0.7$

Vergleich mit der wahren Änderung:

$$\Delta z = \left| f(2,1) - f(2{,}5,\, 1.75) \right|$$

$$= \left| \ln(4+1) - \ln(2.5^2 + 1.75^2) \right|$$

$$= \left| \ln 5 - \ln 9.312 \right|$$

$$= \left| 1.609 - 2.2314 \right| = 0.62 \qquad \Delta z = 0.62$$

Üb. für zu Hause $\quad r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$A(1,2,0) \longrightarrow P(0.9,\ 2.2,\ -0.1)$ in Def. Ebene

angenäherte Änderung der Höhenkoordinate

mit Hilfe des totalen Differentials ?