V Mathe 2 19.6.2017

mathweb.de

$F = m\,a$

Schwerkraft

$= -m\,g \leftarrow 9.81\,\frac{m}{s^2}$

a: Beschleunigung $= v'(t)$: Änderung Geschw.

$v(t)$: Geschw. $= s'(t)$: Änderung Weg

Insgesamt $a = s''(t)$

DGL freier Fall

$$m\,s''(t) = -m\,g$$

$$s''(t) = -g$$

Übung: Ordnung der DGL, explizit/implizit linear/nichtlinear wenn linear: konst. Koeff oder nicht homogen/inhomogen

a) 1. $y'(x) = -2x$: 1. Ordnung, explizit, linear mit konst. Koeffizienten, inhomogen (wg $-2x$)

$y'(x) + 2x = 0 \quad | -2x$

$\Leftrightarrow y'(x) = -2x$

b) $x + y\,y' = 0$ — 1. Ordnung, implizit, nichtlinear — inhomogen

c) $s''(t) = g$ — 2. Ordnung, explizit, linear mit konst. Koeff, inhom.

d) $y'' + y = 0$ — 2. Ordnung, explizit, linear " " ", homog.

e) $2y'' - 4y' + 20y = \cos(\omega x)$ — 2. Ordnung, explizit, linear " " ", inhomogen

Lösen einfacher DGL

$v(0) = \quad +C_1$

$v(t) = -gt + C_1$

1) Nur ein Ableitungsterm

$s''(t) = -g$

1. Integration $\quad \int s''(t)\,dt = s'(t) = \underbrace{\int(-g)\,dt = -gt + C_1}$

2. Integration $\quad \int s'(t)\,dt = \int(-gt + C_1)\,dt$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2} \quad (2)$$

Bedeutung von C_1 und C_2 ?

C_1: Anfangsgeschwindigkeit für $t=0$

$\boxed{v(0) = C_1}$

C_2: Anfangsort für $t=0$

Gl. (2) für $t=0$: $\quad \boxed{s(0) = +C_2}$

2) Homogene lin. DGL mit konst Koeff

$$F = m x''(t) = F_{feder} + F_{dämpf}$$

$$\Leftrightarrow \quad m x''(t) = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Federkonstante}}}{k}\,x(t) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dämpfungskonstante}}}{d}\,x'(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x''(t) + \frac{d}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0}$$

Ansatz $\quad x(t) = e^{\lambda t}$

$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{d}{m}\lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m}e^{\lambda t} = 0 \qquad |:e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

einfache Gleichung in $\lambda \in \mathbb{C}$ n. Ordnung
(hier $n=2$)

hat immer n Lösungen in $\mathbb{C}$

Konkrete Beispiele

1) radioaktiver Zerfall

$$x'(t) = 0.05\, x(t)$$

Ansatz
$x(t) = e^{\lambda t}$

$$\lambda e^{\lambda t} = 0.05\, e^{\lambda t} \quad | : e^{\lambda t}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 0.05}}$$

Einsetzen in Ansatz: eine Lösung

$$x(t) = e^{0.05t}$$

Allg. Lösung $\quad x_{allg}(t) = Ce^{0.05t}$

2) Schwingung

$$x''(t) + 4x(t) = 0$$

Ansatz
$x(t) = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -4$$

$$\lambda_1 = +2i, \quad \lambda_2 = -2i$$

2 Lösung $\quad x_1(t) = e^{2it}$
$\quad x_2(t) = e^{-2it}$

Allg. Lösung $\quad x(t) = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}$

$$\left(e^{2it} = \cos(2t) + i \sin(2t) \right)$$

$$x(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

Lsg. Übung

$$x''(t) + 4x'(t) + 404\, x(t) = 0$$

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 404\, e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 2^2 - 2^2 + 404 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 - 4 + 404 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = -400 \quad | \sqrt{}$$

$$\lambda + 2 = \pm \sqrt{-400}$$

$$= \pm 20i$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 20i$$

Lösung $x(t) = c_1 e^{(-2+20i)t} + c_2 e^{(-2-20i)t}$

$$= c_1 e^{-2t} e^{20it} + c_2 e^{-2t} e^{-20it}$$