

Vorlesung Mathe 2

26.6.2017

$$\text{Bp: } f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1^2 - 3) \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} = 0 \quad \text{I}$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{II}$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \quad \text{III}$$

$$\text{Aus I: } 3x_1^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_{11} = 1 \text{ oder } x_{12} = -1$$

$$\text{Aus II: } -2x_2 + x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_3 = 2x_2 \quad *$$

$$* \text{ in III: } x_2 - 2 \cdot 2x_2 + 3 = 0$$

$$-3x_2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 1$$

$$x_2 = 1 \text{ mit } * \text{ liefert } x_3 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Zwei Kandidaten für Extremwerte: } x_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nun werden H_1, H_2, H_3 benötigt

$$f_{x_1} = (3x_1^2 - 3) \cdot e^{x_1^3 - 3x_1}$$

$$f_{x_2} = -2x_2 + x_3$$

$$f_{x_1 x_1} = 6x_1 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} + e^{x_1^3 - 3x_1} \cdot (3x_1^2 - 3)^2$$

$$f_{x_3} = x_2 - 2x_3 + 3$$

$$f_{x_1 x_2} = 0$$

$$f_{x_1 x_3} = 0$$

$$f_{x_2 x_3} = 1$$

$$f_{x_2 x_1} = 0$$

$$f_{x_2 x_2} = -2$$

$$f_{x_3 x_1} = 0$$

$$f_{x_3 x_2} = 1$$

$$f_{x_3 x_3} = -2$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} + (3x_1^2 - 3)^2 e^{x_1^3 - 3x_1} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Für Kandidat x_{E_1} : $H_3 = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 & 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6e^{-2} \cdot (-2) \cdot (-2) - 6e^{-2} \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 24e^{-2} - 6e^{-2}$$

$$= 18e^{-2} > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2e^{-2} - 0 \cdot 0$$

$$= -12e^{-2} < 0$$

$$H_1 = |6e^{-2}| = 6e^{-2} > 0$$

$$H_1 > 0, H_2 < 0, H_3 > 0$$

keine Entscheidung möglich!

Für Kandidat x_{E_2} :

Sarrus

$$H_3 = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \downarrow = -18e^2 < 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +12e^2 > 0$$

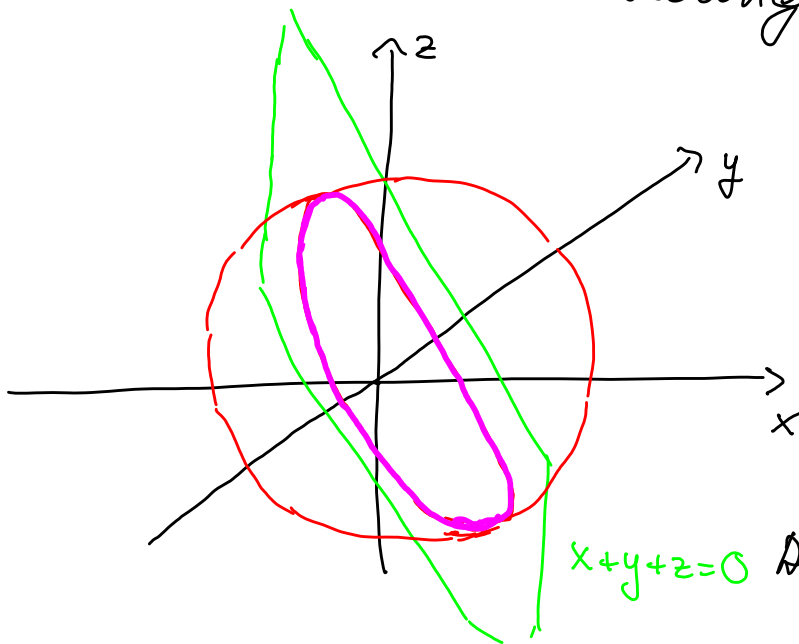
$$H_1 = |-6e^2| = -6e^2 < 0$$

$$H_1 < 0 \quad H_2 > 0 \quad H_3 < 0$$

lokales Maximum bei $x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Bp:



$$\text{Ebene: } x+y+z=0$$

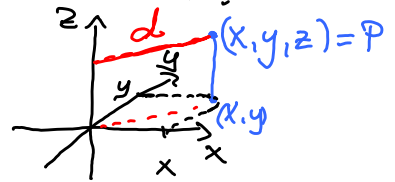
$$\text{Kugel: } x^2+y^2+z^2=1$$

Von Interesse:

Alle Punkte, die auf der Kugel und auf der Ebene liegen liegen

Frage: Welche Punkte auf — haben von der z-Achse den größten bzw. den kleinsten Abstand?

Mathematische Formulierung:



$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \begin{array}{l} \text{Abstandsfunktion} \\ \text{Zielfunktion} \end{array}$$

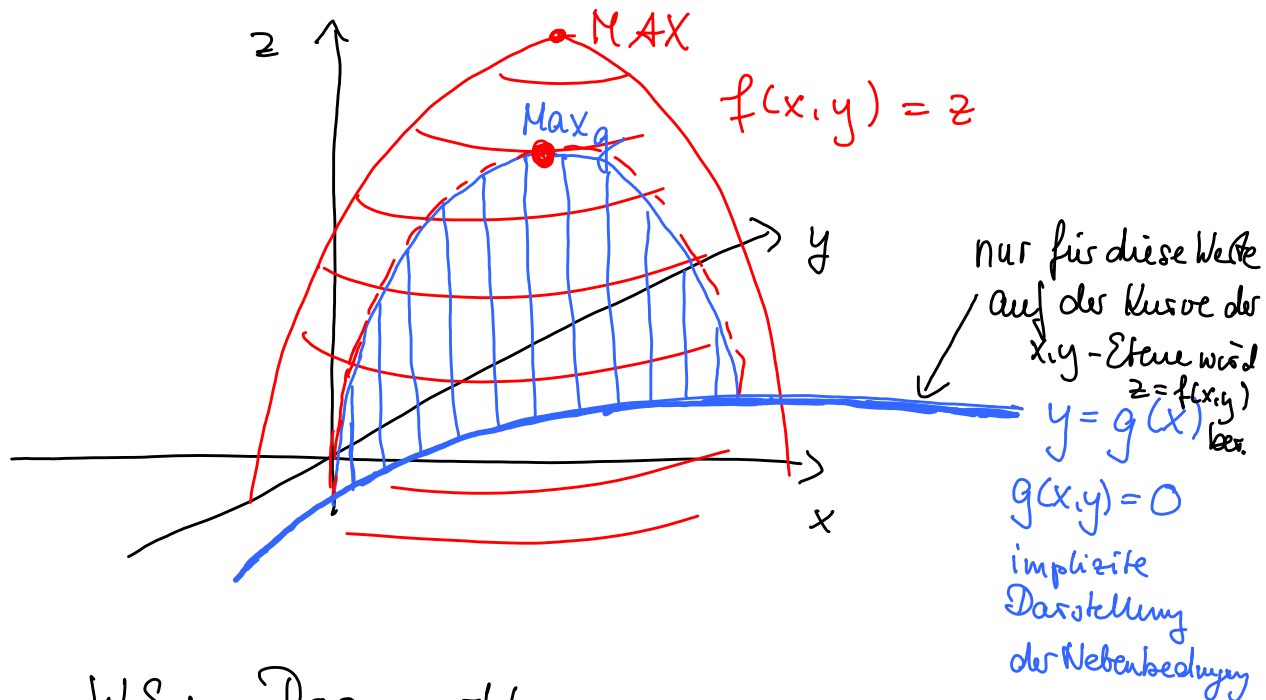
Unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (\text{liegen auf der Kugel})$$

$$\text{und} \quad x + y + z = 0 \quad (\text{liegen auf der Ebene})$$

Lösung dieser Aufgabe später!

Veranschaulichung der Nebenbedingung:



Erinnerung WS: Dosenproblem

Dose mit $V = 1\text{ l}$ mit minimaler Oberfläche?

Nebenbedingung hier: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1\text{ l}$

Zielfunktion hier: $O(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Variablensubstitution: Aus NB: $h = \frac{1000\text{ cm}^3}{\pi \cdot r^2}$

h in Zielfkt. wird durch r ausgedrückt

$\Rightarrow$ Oberfläche nur von einer Variablen

$$O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi \cdot r^2} \quad \text{abhängig}$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

in WS: $O'(r) = 0 \quad \dots$

geeignet
 für Fkt. mit
 2 Variablen
 und einer
 Nebenbed.

Eine Methode für Fkt. mit mehr als zwei Variablen und mehr als einer Nebenbedingung heißt die

Methode von Lagrange
 (Multiplikationsregel von Lagrange)

Lagrange (1736-1813)

Zunächst : Lagrange-Methode für Fkt. mit 2 Variablen
und einer NB

$$\text{geg: } z = f(x, y) \\ g(x, y) = 0$$

Die Extremwerte der Funktion $z = f(x, y)$ unter der
NB $g(x, y) = 0$ liegen an den Stellen, an denen
die Funktion $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$
ihre Extremwerte annimmt

λ heißt der Lagrange-Multiplikator