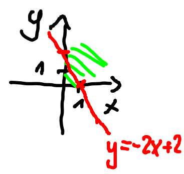
Vorlesung Mathematik 2

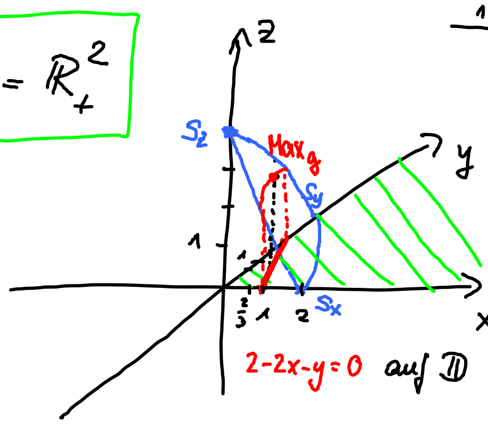
28.6.2017

Bsp. $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4$ $\quad \boxed{D = \mathbb{R}_+^2}$



$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$ Nebenbedingung implizit

$* \quad y = -2x+2$ explizite Form



1. Lösungsweg : Variablensubstitution

NB nach y auflösen s. *

in $z = f(x,y)$ einsetzen

$$z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}(-2x+2)^2 + 4$$
$$= -x^2 - \frac{1}{2}(4x^2 - 8x + 4) + 4$$
$$= -x^2 - 2x^2 + 4x - 2 + 4$$
$$z = -3x^2 + 4x + 2$$

$$z' = -6x + 4 \qquad z'(x) = 0 \iff -6x + 4 = 0$$
$$z'' = -6 \qquad \iff 6x = 4$$
$$\iff x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$x = \frac{2}{3}$ in $*$: $y = -2 \cdot \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3}$

Max. bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ also bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$

2. Lösungsweg

$$L(x,y,\lambda) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 + \lambda(2 - 2x - y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 + 2\lambda - 2\lambda x - \lambda y$$

Notwendige Bedingungen

I $\quad L_x(x,y,\lambda) = -2x - 2\lambda = 0$

II $\quad L_y(x,y,\lambda) = -y - \lambda = 0$

III $\quad L_\lambda(x,y,\lambda) = 2 - 2x - y = 0$ das ist genau die Nebenbedingung!

Aus I: $-2x = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -x$
Aus II: $-y = \lambda \Rightarrow \lambda = -y$

$\Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$ $*$

$*$ in III: $2 - 2x - x = 0 \Leftrightarrow 2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 2 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

mit $x = y$ ist der Kandidat für einen Extremwert bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Bp: Dosenproblem

Produktion von oben offenen Dosen mit Radius r und Höhe h

$V = 1$ Liter   Frage: Abmessungen bei minimalem Materialverbrauch?

Lösung mit der Lagrange-Methode:

$$L(r,h,\lambda) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$$

Zielfunktion: Oberfläche
$O(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h$

Nebenbedingung: Volumen = 1 Liter = $1000\,cm^3$
$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$
$g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$

notwendige Bedingungen

$$L_r = 2\pi r + 2\pi \underline{h} + 2\pi r \underline{h} \lambda = 0 \qquad \text{I}$$

$$L_h = 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0 \qquad \text{II}$$

$$L_\lambda = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0 \qquad \text{III}$$

Aus II: $2\pi r = -\lambda \pi r^2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{r}$ $*$

Aus I: $2\pi r + h(2\pi + 2\pi r \lambda) = 0$

mit $*$: $2\pi r + h\left(2\pi + 2\pi \cdot r \cdot \left(-\frac{2}{r}\right)\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r + h(2\pi - 4\pi) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r = 2\pi h \quad |:2\pi$

$\Rightarrow r = h$

Aus III mit $r = h$: $\pi \cdot r^2 \cdot r - 1000 = 0$ $\Leftrightarrow \pi \cdot r^3 = 1000$ $\Leftrightarrow r^3 = \frac{1000}{\pi}$

Es ist $r = h = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ Nachweis des Minimums noch nicht erbracht! Es ist aber eins!

Methode von Lagrange allgemein:

$$L(x,\lambda) = \underbrace{f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, g_j(x)}_{\text{Funktion mit } n+k \text{ Variablen}}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$

Formulierung der hinreichenden Bedingungen für eine Fkt. mit n Variablen und einer NB

notwendig: Sämtliche partielle Ableitungen "verschwinden"

Sei $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ ein Kandidat

x^* ist ein lokales Maximum, falls

$$G_2 > 0,\ G_3 < 0, \ldots\ G_n \begin{cases} < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

x^* ist ein lokales Minimum, falls

$$G_2 < 0,\ G_3 < 0, \ldots\ G_n < 0$$

mit $G_2 = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \overset{L_{\lambda x_1}}{g_{x_1}} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & 0 \end{vmatrix}$

$\vdots$

$$G_n = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} & \overset{\overset{0}{L_{x_1\lambda}}}{g_{x_1}} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} & g_{x_n} \\ g_{x_1} & \cdots & & g_{x_n} & 0 \end{vmatrix}$$

hinreichende Bedingungen für k Nebedingungen sind sehr kompliziert!

Lösung des Eingangsbeispiels:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \sqrt{x^2+y^2} + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(x+y+z)$$

$$L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \qquad \text{I}$$

$$L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad \text{II}$$

$$L_z = 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \qquad \text{III}$$

$$L_{\lambda_1} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \qquad \text{IV}$$

$$L_{\lambda_2} = x+y+z = 0 \qquad \text{V}$$

Zu Hause: GS lösen

Hinweis auf Ergebnis:

P_1: $x_1 = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ $y_1 = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ $z_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$

P_2: $x_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$ $y_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$ $z_2 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

P_3: $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $z_3 = 0$

P_4: $x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $z_4 = 0$