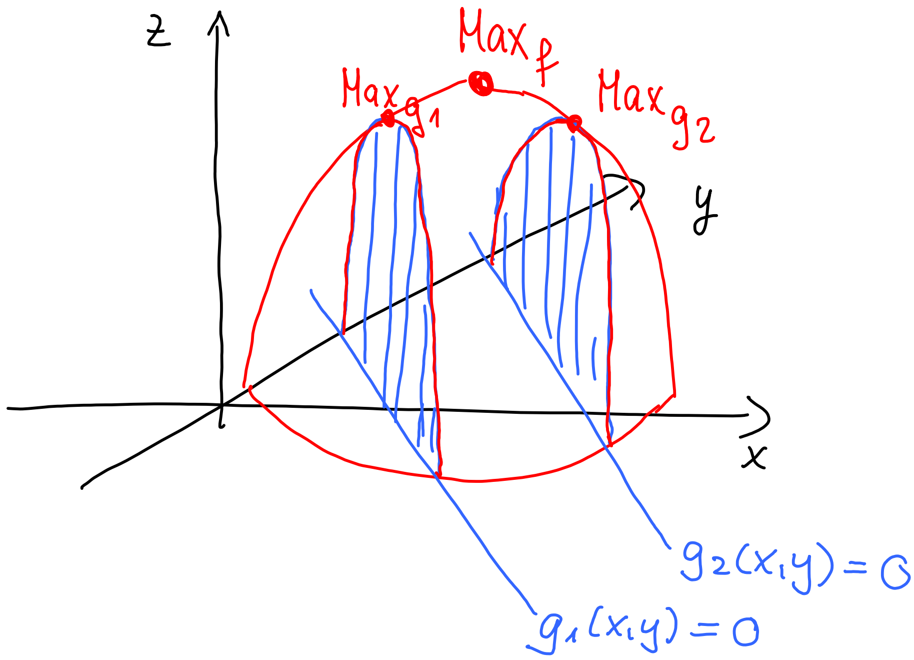
Vorlesung Mathe 2
3. 7. 2017



$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$\frac{L(x,y,\lambda) - f(x,y)}{g(x,y)} = \lambda$$

Interpretation mit Hilfe der Differentialrechnung

λ ist der Differentialquotient der Funktion L nach der Funktion g

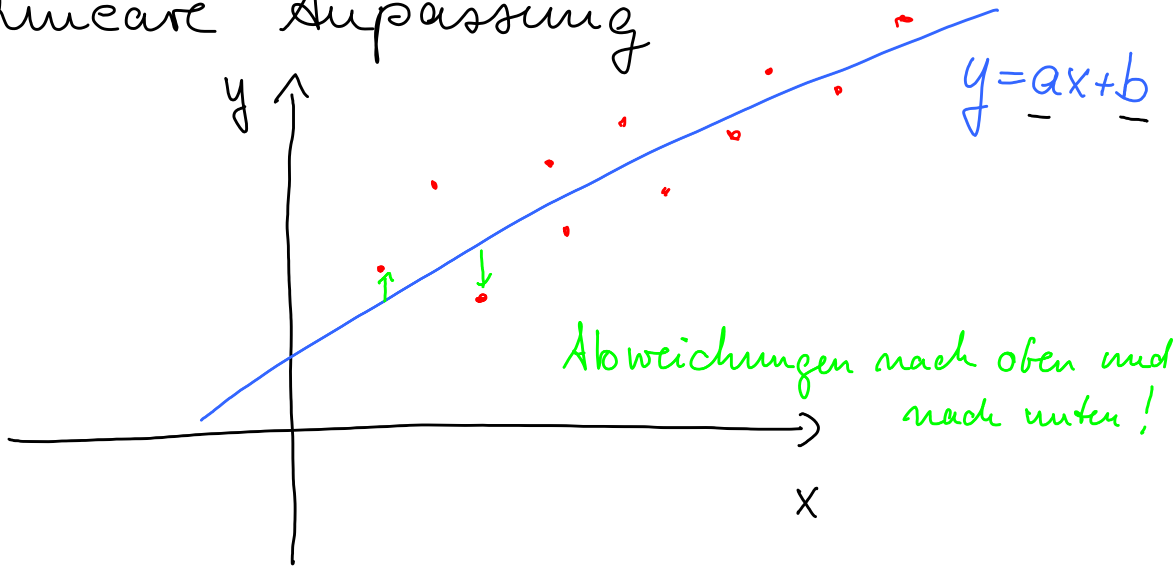
$$\lambda = \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial g(x,y)}$$

λ ist die marginale Änderungsrate der Fkt. f relativ zur NB g

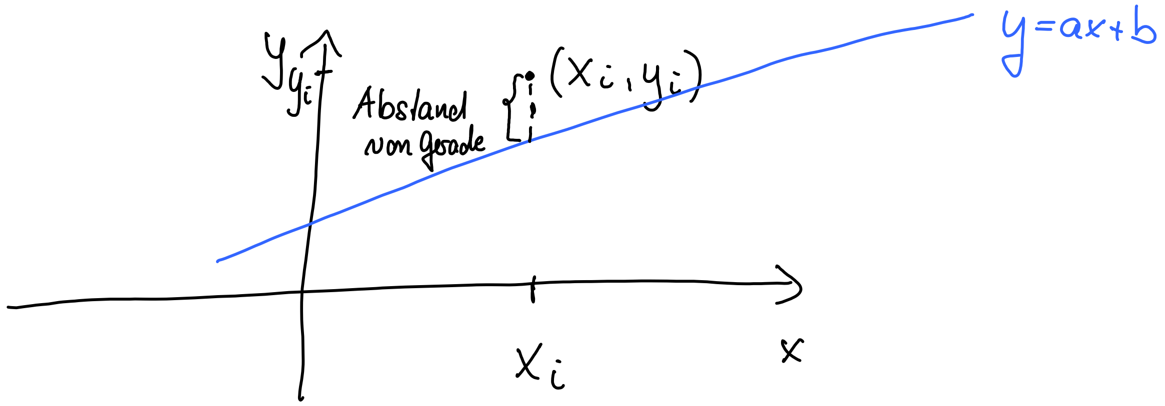
$\Longrightarrow$ Marginalanalyse

Anwendung der mehrdimensionalen Analysis:

Lineare Anpassung



Ziel: a, b so bestimmen, dass die Gerade "optimal" liegt.



Methode der kleinsten Quadrate nach C.F. Gauss

Damit Abweichungen sich nicht aufheben, wählt man "Abstandsquadrate"

$$\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

$Q(a,b)$ ist Fkt. mit zwei unabh. Variablen: a, b

Ziel: Minimum bestimmen bzw. a, b so bestimmen, dass $Q(a,b)$ ein Minimum ist.

x_i, y_i sind n Messwerte $i=1,\dots,n$

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2(ax_i+b)\cdot y_i + (ax_i+b)^2$$

Notwendigen Bedingungen:

$$Q_a(a,b) = 0$$

$$Q_b(a,b) = 0$$

$$Q_a(a,b) = \sum_{i=1}^{n} -2x_i\cdot y_i + 2(ax_i+b)\cdot x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} a x_i^2 + b x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad **$$

$$Q_b(a,b) = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i+b))$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} -y_i + ax_i + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i+b)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + n\cdot b} \quad *$$

Setze: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

arithmetische Mittelwerte

Aus * $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{n} b$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \bar{y} - a\bar{x}} \quad ***$$

*** in **

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\bar{y} - a\bar{x})\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

Also: a und b sind bestimmt für $y = ax + b$

Nachweis des Minimums

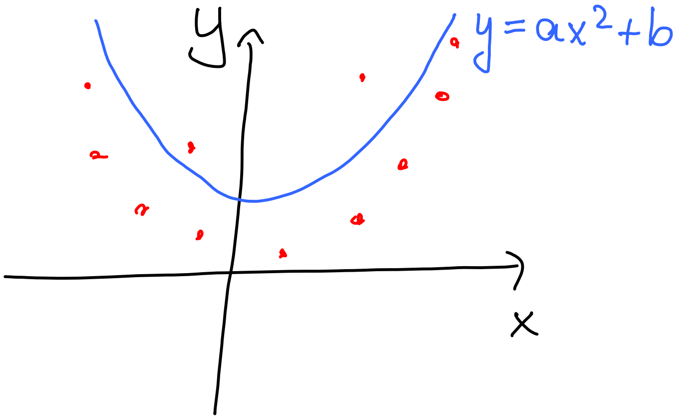
$$Q_{aa}(a,b) > 0$$

$Q_{bb}(a,b)$ bestimmen

$$\Delta = Q_{aa} \cdot Q_{bb} - (Q_{ab})^2 > 0$$

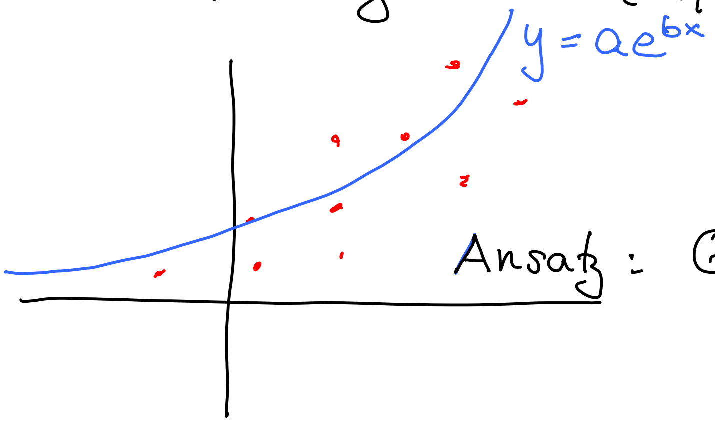
etwas zu umfangreich ☺

Methode der kleinsten Quadrate ist auch für die Anpassung durch Ausgleichskurven aller Art anwendbar!



Bp: 4 Messwerte
(x_1, y_1)
(x_2, y_2)
(x_3, y_3)
(x_4, y_4)

Ansatz: $$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{4} \left[y_i - (a x_i^2 + b) \right]^2$$

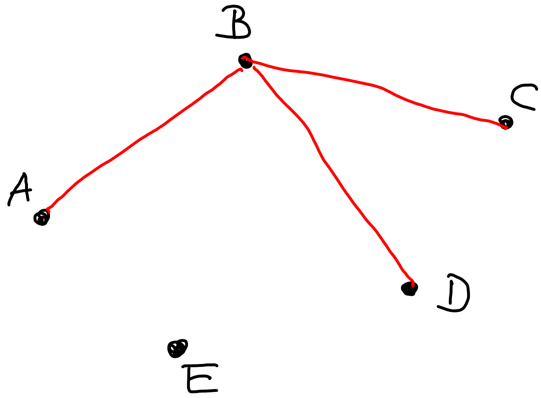


Ansatz: $$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{4} \left[y_i - a e^{b x_i} \right]^2$$

Die Methode der kleinsten Quadrate benötigt die Kenntnisse der Extremwertbestimmung ohne NB der mehrdimensionalen Analysis!

Themenwechsel : Graphentheorie

Teilgebiet der Mathematik



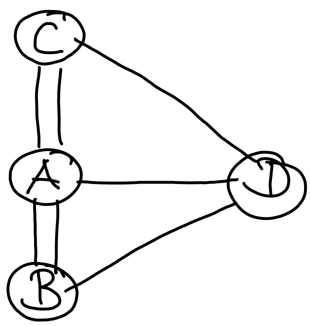
Städte	Knoten
Straßen	Kanten

Systeme von Objekten mit ihren Beziehungen

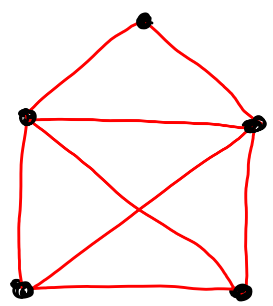
Wege
Stromleitungen
Telefonleitungen
Zuordnungen anderer Art
} durch Graphen repräsentiert

Suche nach Wegen (kürzeste)
geringsten Kosten
etc.

Brückenproblem



Haus vom Nikolaus



Suchen eines Euler-Wegs

Mathematische Formulierung eines Graphen:

$$G = (M, K, v)$$

Bp: $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$

$v(k_1) = \{x_1, x_2\}$: Kante zw. x_1 und x_2

$v(k_1) = (x_1, x_2)$: Kante von x_1 nach x_2

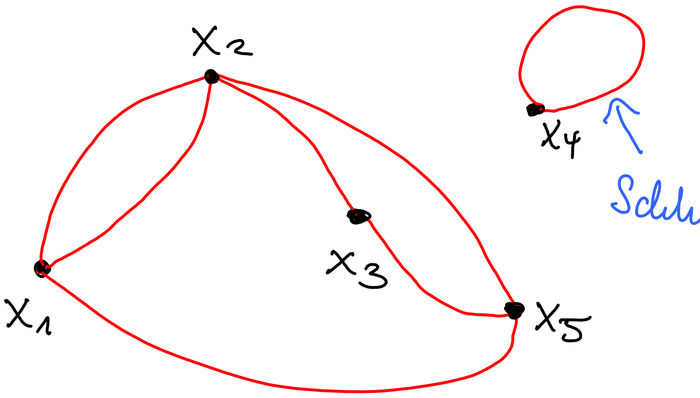
geordnetes Paar

.. $v(k_2) = \{x_1, x_2\}$ $\quad$ $v(k_4) = \{x_2, x_5\}$

$v(k_3) = \{x_2, x_3\}$ $\quad$ $v(k_5) = \{x_3, x_5\}$

$v(k_6) = \{x_1, x_5\}$

$v(k_7) = \{x_4, x_4\}$



Schlinge