

Vorlesung Mathe 2

5.7.2017

Graphentheorie

$$G = (M, K, v)$$

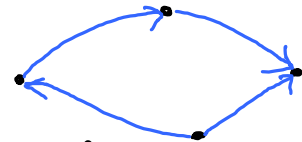
Knotenpaare ungeordnet : $\{x_i, x_j\}$

geordnet : (x_i, x_j)

1. Stelle 2. Stelle

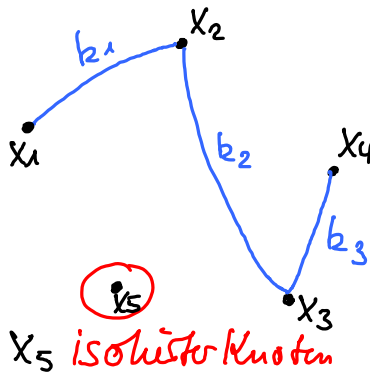


gerichteter Graph : Digraph



Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen adjazent

Eine Kante, die mit einem Knoten verbunden ist, heißt inzident



k_1 inzident mit x_1 und x_2

k_2 inzident mit x_2 und x_3

k_3 inzident mit x_3 und x_4

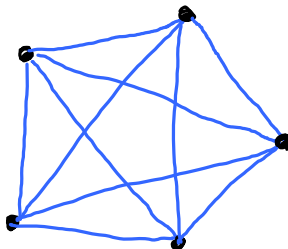
x_5 isolierter Knoten

Def: schlichter Graph

Ein Graph heißt schlicht, wenn er keine Schleifen und keine Mehrfachkanten enthält

Def: vollständiger Graph

G ist vollständig, wenn je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind. (also "jeder mit jedem")



4 Knoten : $3 + 2 + 1 = 6$ Kanten

5 Knoten : $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ Kanten

6 Knoten : $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ Kanten

:

Erinnerung

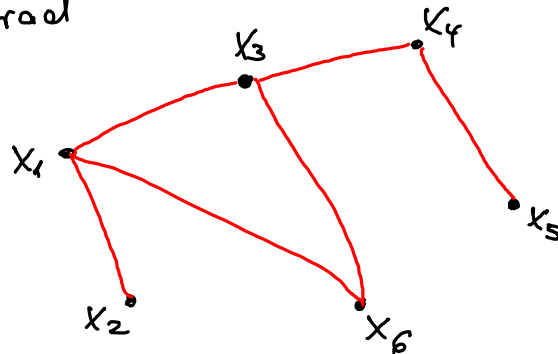
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n \text{ Knoten} : (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 =$$

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \text{ Kanten}$$

Beweis durch vollständige Induktion!

Def: Knotengrad



Die Anzahl der in einem Knoten incidenten Kanten

$$d(x_1) = 3$$

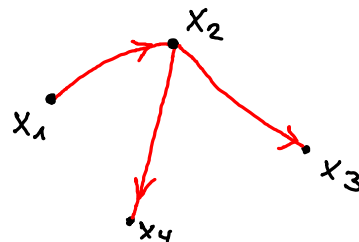
$$d(x_3) = 3$$

$$d(x_5) = 1$$

$$d(x_2) = 1$$

$$d(x_4) = 2$$

Fall: Digraph



hier zwischen ankommenden und abgehenden Kanten zu unterscheiden

$$d^+(x_1) = 1$$

$$d^+(x_2) = 2$$

$$d^+(x_3) = 0$$

$$d^-(x_1) = 0$$

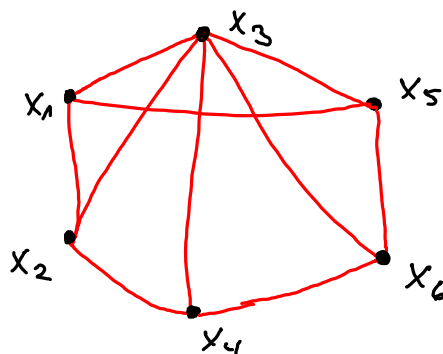
$$d^-(x_2) = 1$$

$$d^-(x_3) = 1$$

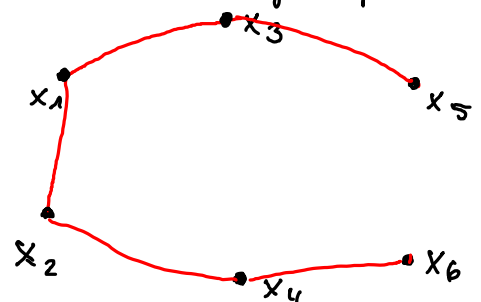
Def. zusammenhängender Graph

Zu je zwei Knoten gibt es stets eine Kantenfolge

Bp:



Zusammenhangskomponente



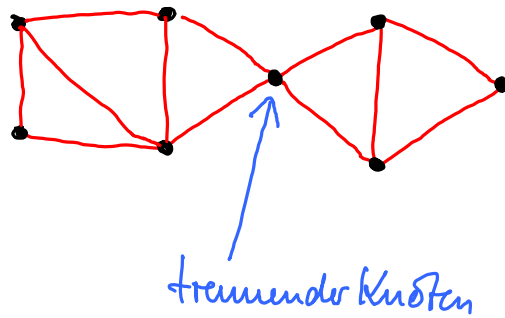
hier zu erwähnen: Teilgraph

Untergraph

entsteht durch Weglassen von Kanten

entsteht durch Weglassen von Knoten und allen mit diesen Knoten inzidenten Kanten

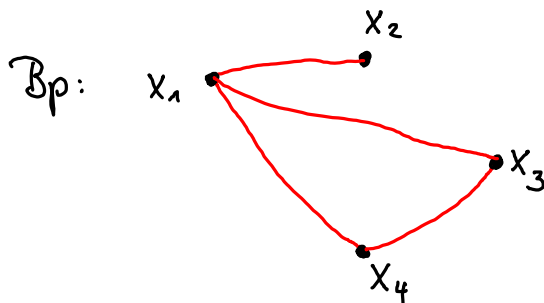
Def: Artikulationspunkte, trennende Knoten



Matrizendarstellung von Graphen

Erinnerung: Adjazenzgraph

Graphen sind anschaulich → Benötigt wird eine Darstellung, mit der man rechnen kann!

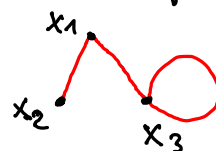


→ Matrix, quadratisch
 $A = (a_{ij})$ mit
 $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \{x_i, x_j\} \text{ Kante} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	1	0	0	0
x_3	1	0	0	1
x_4	1	0	1	0

A quadratisch
 symmetrisch
 Hauptdiagonale besteht aus Nullen

Spezialfall

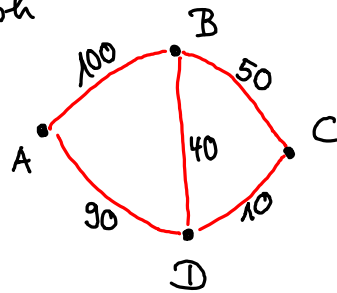


	x_1	x_2	x_3
x_1	0	1	1
x_2	1	0	0
x_3	1	0	2

Für gerichtete Graphen gilt:

nur eine 1 bei a_{ij} , wenn von x_i nach x_j eine gerichtete Kante existiert

Def: Bewerteter Graph



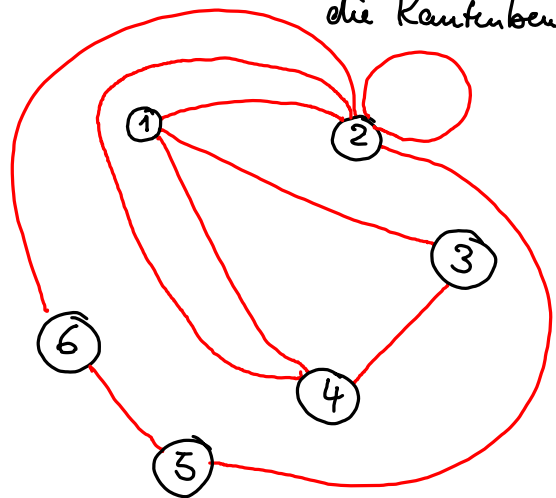
	A	B	C	D
A	0	100	0	90
B	100	0	50	40
C	0	50	0	10
D	90	40	10	0

Bp

z.B. Städte mit Entfernungen

keine "1", sondern die Kantenbewertung

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	1	2	0	1	1	1
3	1	0	0	1	0	0
4	1	1	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0	1
6	0	1	0	0	1	0



Def: Incidenzmatrix für schlichte Graphen

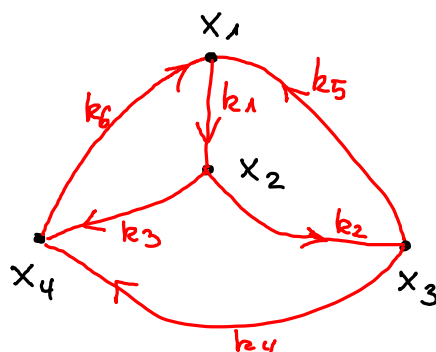
stellt die Beziehung zwischen Knoten und Kanten dar

$$B = (b_{ij}) \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n & n \text{ Knoten} \\ j=1, \dots, k & k \text{ Kanten} \end{matrix}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k_j \text{ mit } x_i \text{ inzidiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Falle eines Digraphen:
$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } k_j \text{ von } x_i \text{ ausgeht} \\ -1 & \text{wenn } k_j \text{ in } x_i \text{ ankommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bp:



	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
x_1	1	0	0	0	-1	-1
x_2	-1	0	1	0	0	0
x_3	0	1	0	1	1	0
x_4	0	0	-1	-1	0	1