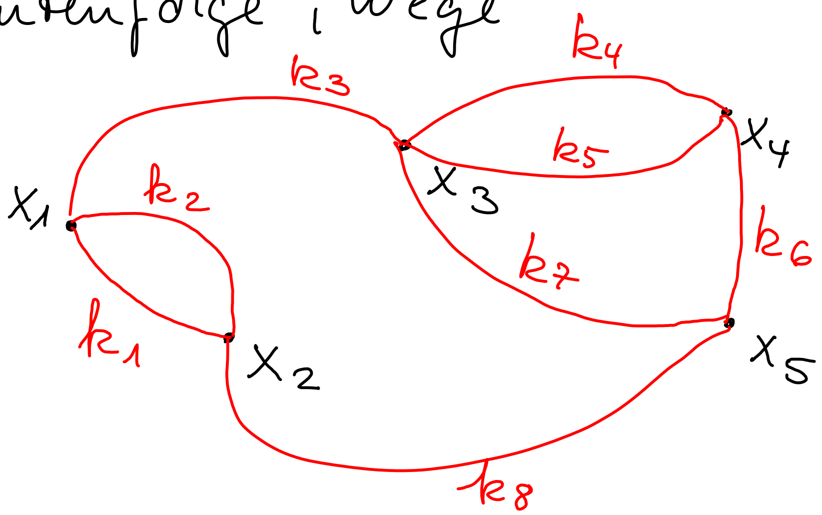
Vorlesung Mathematik 2
10.7.2017

Kantenfolge, Wege



Kantenfolge $k_8\, k_7\, k_5\, k_4\, k_5\, k_6$

Kantenzug : keine Kante in der Kantenfolge kommt zweimal vor

im Bsp: $k_1\, k_8\, k_6\, k_4\, k_3$

Eulerzug, Euler'sche Linie

Ein Kantenzug, der jede Kante genau einmal enthält, heißt Eulerzug

(Erinnerung: Königsberger Brückenproblem)

Satz (Euler 1736)

Ein endlicher, ungerichteter, nicht notwendig schlichter Graph $G = (M, K, v)$ hat genau dann einen Eulerzug, wenn G bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist und die Zahl z

der Knoten mit ungeradem Grad O oder 2 ist.

Lösung des Königsberger Brückenproblems:

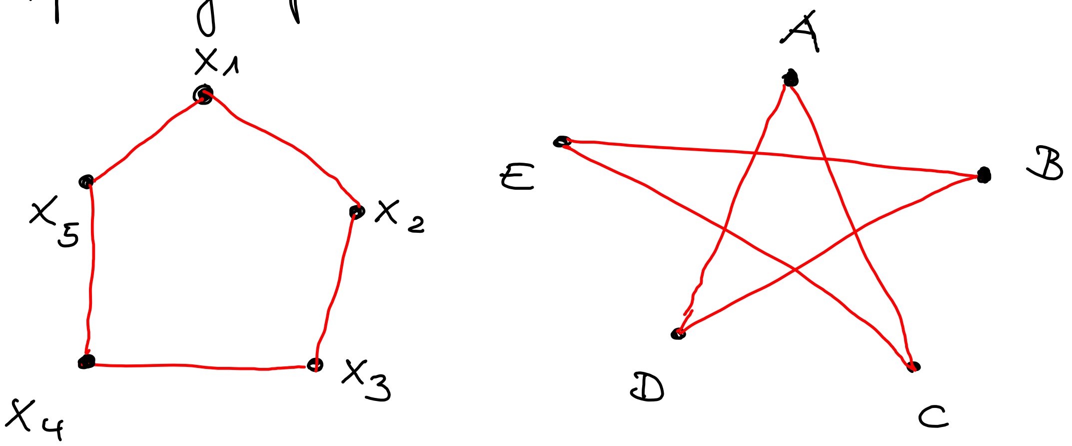
Eine Brücke muss weg!

bzw. Eine zusätzliche Brücke bauen!

Def: Hamiltonsche Linie

Ein Weg, der jeden Knoten eines Graphen genau einmal enthält, heißt Hamilton'sche Linie

Isomorphe Graphen



Diese beiden Graphen sind isomorph!

(Quelle: Skript Konen)

Zwei Graphen G_1 $(=M_1, K_1, V_1)$ und G_2 $(=M_2, K_2, V_2)$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi: M_1 \to M_2$ mit

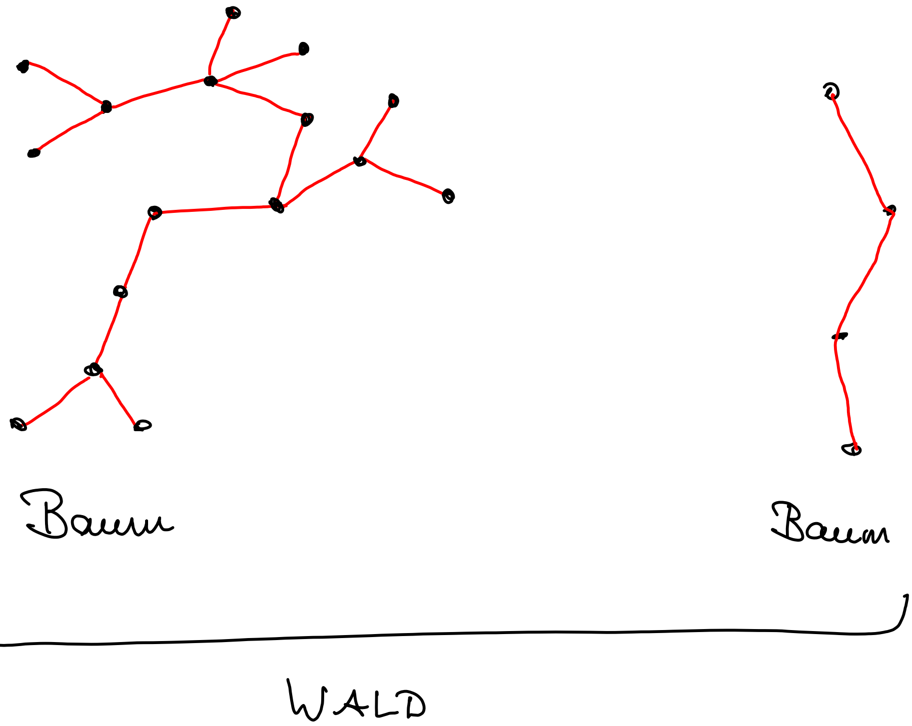
$$x, y \in K_1 \Leftrightarrow [\varphi(x), \varphi(y)] \in K_2$$

Folgende bijektive Abbildung wird gewählt:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\varphi(x)$	A	C	E	B	D

M_1	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3, x_4\}$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_5, x_1\}$
M_2	$\{A, C\}$	$\{C, E\}$	$\{E, B\}$	$\{B, D\}$	$\{D, A\}$

Bäume und Wälder



Def: Baum

Ein Graph, in dem je zwei Knoten durch genau einen Weg verbunden sind

Also ein zusammenhängender Graph ohne geschlossene Kantenfolge (ohne Zyklen)

In jedem Baum ist ein Knoten x_i mit $d(x_i) > 1$ ein trennender Knoten (Artikulationspunkt)

Knoten mit Knotengrad 1 heißen Blätter.

Satz: Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

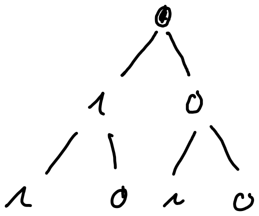
(1) G ist ein Baum

(2) Zwischen je zwei Knoten enthält G genau einen Weg

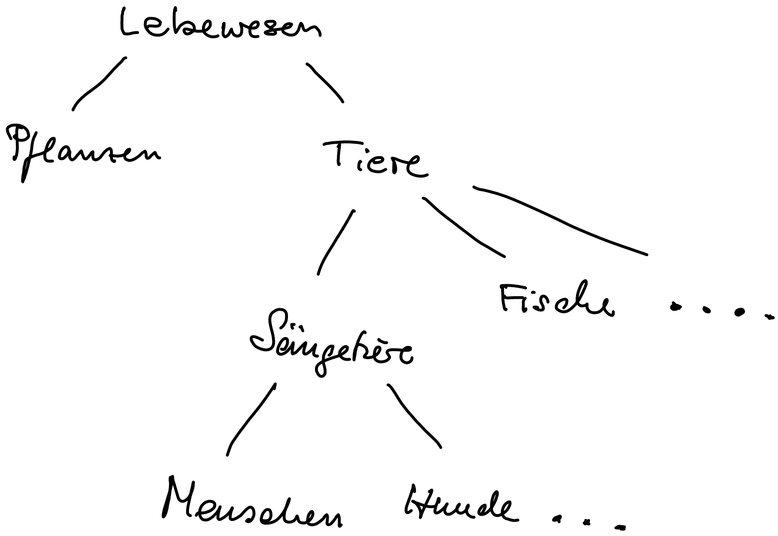
(3) G ist minimal zusammenhängend

(4) G ist maximal zyklenfrei (kreislos)

Wo findet man Bäume?



Stammbäume (Biologie)

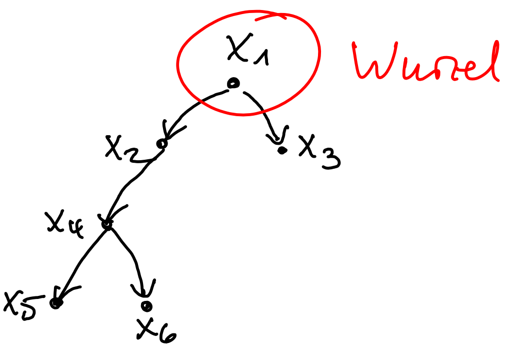


Def: Wurzelbaum

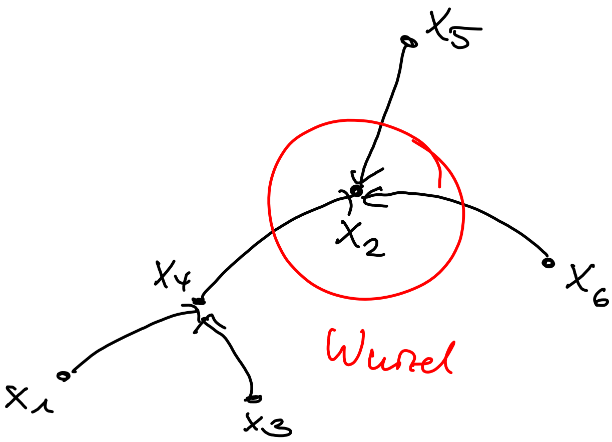
Kanten gerichtet (Digraph)

Out-Trees : von der Wurzel gehen alle Kanten weg

In-Trees : bei " " kommen " " an



OUT TREE



IN TREE

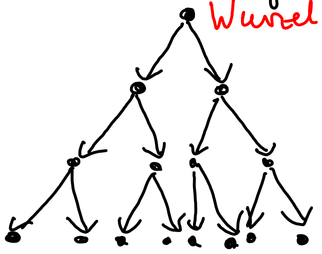
Def: Höhe des Wurzelbaumes

größte Länge von Wurzel zu Blatt

Def: Binärbaum

Ein Wurzelbaum, bei dem jeder Knoten höchstens zwei Nachfolger hat (Kindknoten)

Vollständiger Binärbaum



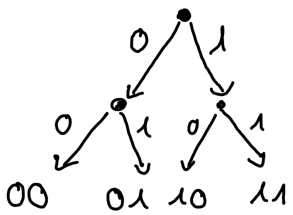
Höhe H : Anzahl der Knoten im längsten Weg, hier: 4

alternativ : Höhe H : Anzahl der Kanten im längsten Weg

Anzahl der Knoten im vollständigen Binärbaum:

$2^H - 1$ hier: $2^4 - 1 = 15$

Bp. aus der Logik



Anwendung von Binärbäumen

BST : Binary Search Trees

Anwendung der Binärbäume in der Graphentheorie

Huffman - Codierung (1952 David A. Huffman)

Präfix - Code

Kein Code ist Beginn eines anderen Codes

0 10 11 ✓ ~~0~~ ~~1~~ ~~10~~ ~~11~~

0 01 10

↯

Huffman - Code ist ein Präfix - Code

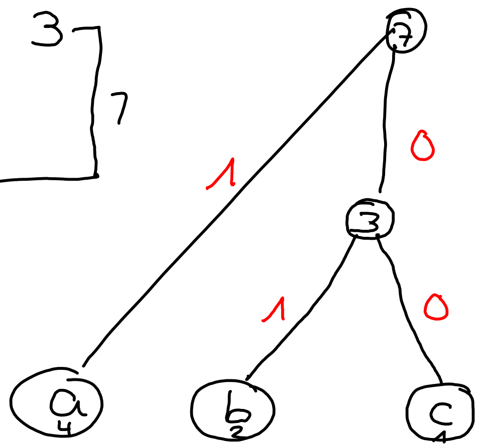
Aufbau eines Baumes für die Codierung

1) Ermitteln der Häufigkeit für jeden Buchstaben (auch Leerzeichen und Satzzeichen)

Bp: abacaba

a	b	c	
4	2	1	Häufigkeiten

c 1] 3
b 2] 3] 7
a 4] 7



Buchst.-Code: 1 01 00

$\boxed{a = 1,\ b = 01,\ c = 00}$

Code $\underbrace{01}_{b}\,\underbrace{1}_{a}\,\underbrace{1}_{a}\,\underbrace{00}_{c}\,\underbrace{01}_{b}\,\underbrace{1}_{a}\,\underbrace{00}_{c}\,\underbrace{1}_{a}\,\underbrace{1}_{a}$

b a a c b a c a a

Bp.

MISSISSIPPI IST MISSISSIPPI

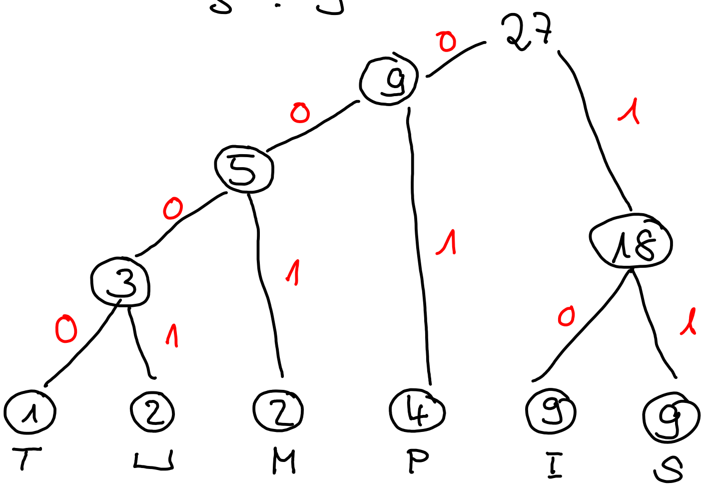
M : 2 I : 9 S : 9 P : 4 T : 1 ␣ : 2

T : 1] 3
␣ : 2] 3
M : 2
P : 4
I : 9
S : 9

M : 2] 5
T,␣ : 3] 5
P : 4
I : 9
S : 9

P : 4] 9
M,T,␣ : 5] 9
I : 9
S : 9

I : 9] 18
S : 9] 18
M,T,␣,P : 9



T	␣	M	P	I	S
0000	0001	001	01	10	11