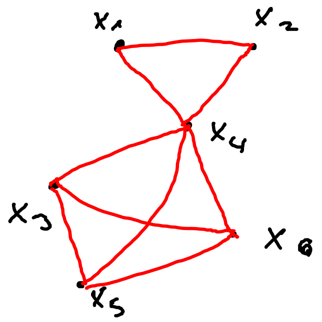
Vorlesung Mathematik

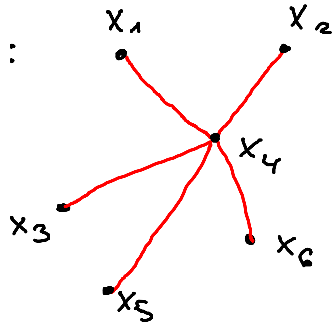
12.7.2017

Def: Gerüst

Ein zusammenhängender Teilgraph eines zusammenhängenden Graphen mit minimaler Kantenzahl heißt Gerüst



Gerüst:



1 Gerüst von vielen Möglichkeiten

Def: Bewerteter Graph

Jeder Kante $k \in K$ von $G = (M, K, V)$ wird eine reelle Zahl $f(k) \in \mathbb{R}$ zugeordnet, dann ist $G' = (M, K, V, f)$ ein bewerteter Graph

Bedeutung der Adjazenzmatrix

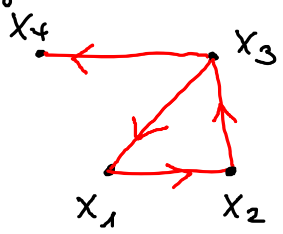
Bilde $A \quad A^2 \quad A^3 \quad A^4 \; \ldots$

A: Anzahl der Wege der Länge 1

A^2: sagt aus, wieviele Wege der Länge 2 ex.

Aussage über Anzahl und Existenz von Pfeilfolgen in Digraphen

Bp:



$$A = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

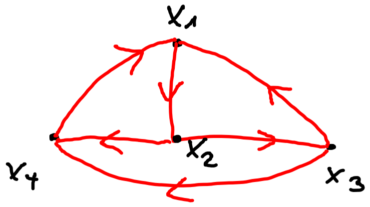
1 Weg der Länge 2 von x_1 nach x_3

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&\boxed{1}&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Beweis erfolgt über die vollständige Induktion!

zu Hause :

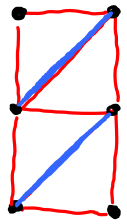


A
A^2 hier sollte bei x_{12} eine 2 erscheinen!
Bedeutung ?

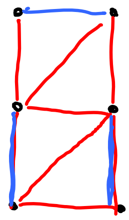
Anwendung der Graphentheorie : Matching

bipartiter Graph : besteht aus zwei disjunkten Knotenmengen

Bp :



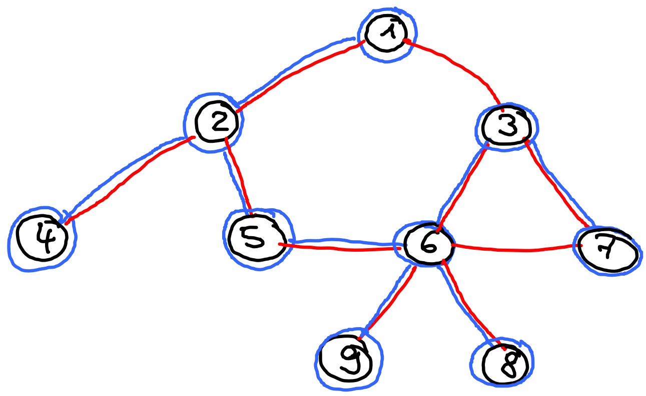
nicht erweiterbares maximales Matching



perfektes Matching

Durchlaufen von Graphen

Bp.



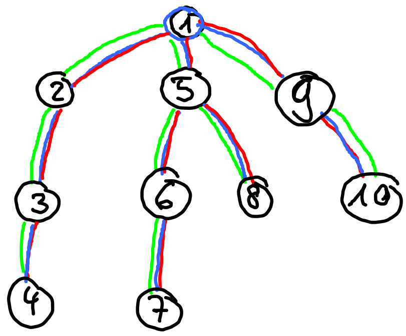
Ziel: jeden Knoten mindestens einmal besuchen!

Tiefensuche :

1) Startknoten wählen
2) Besuche einen der möglichen Nachbarn (bei mehreren Nachbarn alphabetische bzw. numerische Auswahl)
   Markiere Knoten als besucht
3) Besuche von diesem Knoten weitere Knoten wie in 2)

Breitensuche :

1) Startknoten wählen
2) Alle Nachfolgerknoten markieren
3) Von diesen Knoten wieder alle Nachfolger markieren.



Tiefensuche

Breitensuche

Ergebnis gleich
Durchlaufen unterschiedlich

hier: nicht bewertete Graphen

Bei bewerteten Graphen spielt nun die Kantenbewertung eine bedeutende Rolle.

Gerüst bei bewerteten Graphen : minimal aufspannender Baum
(engl: minimal spanning tree : MST)

Def: T ist MST $\Leftrightarrow \sum_{k \in K(T)} w(k)$ minimal ist, dabei $w(k)$ Kantenbewertung

Summe aller Kantenbewertungen im MST ist minimal

Aufsuchen eines MST : Algorithmus von Kruskal (Joseph Kruskal, 1956)
(für ungerichtete bewertete Graphen)

1) Suche in G (bewertet) die Kante mit dem kleinsten Gewicht, falls sie Kreis bildet, verwerfen

2) 1) so oft wiederholen, bis nichts mehr geht!

Bp.