12. Differentialgleichungen (kurz)

[Literatur: Teschl05, Bd. 2, S. 171-197]

12.1. Wozu braucht man Differentialgleichungen?

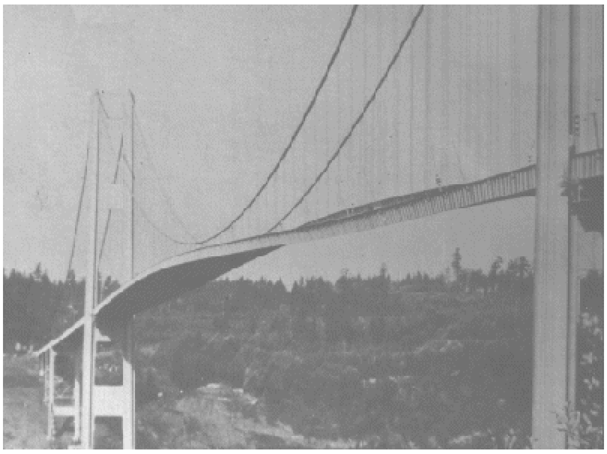
Am 28. Juli 2006 stürzte in Köln ein Kran samt Lastwagen um. Was war passiert? –

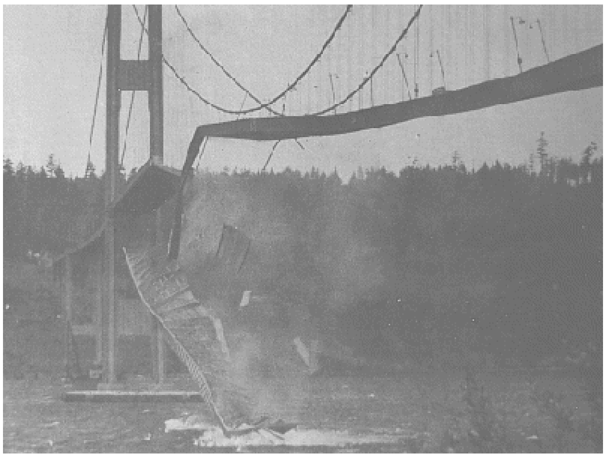
- Die Tragegurte am zu transportierenden Gegenstand (Tresor) rissen
- Der Kran wurde in Schwingungen versetzt und stürzte um.

Der Kran ist ein komplexes technisches System, das zu Schwingungen in der Lage ist.[7]

Die **Computersimulation** (mit Differentialgleichungen) untersucht solche Systeme, um bereits bei der Konstruktion aufzudecken, ob gefährliche Schwingungen im System stecken.

Weiteres berühmtes Beispiel: **Tacoma Bridge** Failure (Video) am 07. November 1940: (längeres Video mit Ton)





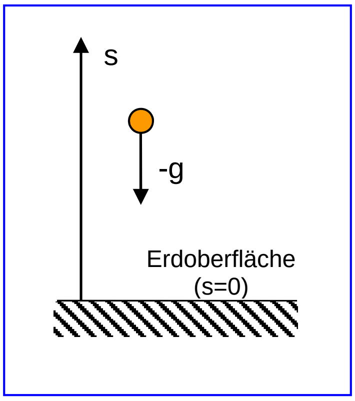
Was war passiert?

- Ein starker Wind hatte die Brücke zu Schwingungen aufgeschaukelt, die die Brückenkonstruktion nicht geeignet dämpfte.
- Die Neukonstruktion der Brücke hatte entsprechende Dämpfungselemente eingebaut und hält seither allen Winden stand.

Die Simulation (mit Differentialgleichungen) ist ein wichtiges Hilfsmittel in Informatik und Ingenieurwesen, um das Verhalten in Extremfällen zu verstehen. Weiteres Anwendungsfeld sind Computerspiele: **Game Physics**.

Mehr dazu im **WPF „Spiele, Simulation und dynamische Systeme“** (W. Konen).

Ein schönes Beispiel von http://crayon-physics.softonic.de: crayon.bat: Ein kleines Spiel mit großem WOW-Effekt, das Game Physics interaktiv erfahrbar macht. Man zeichnet Boxen oder Balken, die unter Schwerkraft fallen, mit dem Ziel, einen Ball zu einem Stern zu bringen.



Hier befassen wir uns mit sehr einfachen dynamischen Systemen

- freier Fall
- Federpendel

an denen wir die Grundlagen der **Differentialgleichungen (DGL)** erklären.

Zur Lösung von DGLs braucht man **komplexe Zahlen** (!)

[7] Weitere spektakuläre Kran-Umstürz-Photos: www.craneaccidents.com

12.2. Grundlagen

Aktivierung: Wie kann man den physikalischen Vorgang „Freier Fall eines Körpers“ mathematisch beschreiben? Welchen Kräften unterliegt der Körper?

ANTWORT:

Als Antwort erhalten wir eine Gleichung, die die Ableitungen einer Funktion – hier s(t) – enthält.

Satz S 12-1: gewöhnliche Differentialgleichung n. Ordnung

Sei y(x) eine reelle Funktion in einer Veränderlichen $x \in R$. Eine Gleichung, in der y(x) und ihre Ableitungen bis zur n. Ordnung auftreten, heißt **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) n. Ordnung**.

Lässt sich eine DGL durch Äquivalenzumformungen nach $y^{(n)}(x)$ auflösen, so heißt sie **explizit**:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Ist dies nicht möglich, so heißt sie **implizit**: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Satz S 12-2: lineare Differentialgleichung

Sei y(x) eine reelle Funktion in einer Veränderlichen $x \in R$. Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

in der also die $y^{(i)}$ nur als lineare Terme auftauchen, heißt **lineare Differentialgleichung n. Ordnung**. $g(x)$ (der einzige Term, in dem y nicht vorkommt) heißt **Störglied**.

Ist das Störglied $g(x)=0$, so heißt die DGL **homogen**, sonst **inhomogen**.

Sind die $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ keine Funktionen von x sondern Konstanten, so haben wir den Sonderfall der **linearen DGL mit konstanten Koeffizienten**.
(Das Störglied darf weiterhin eine nichtkonstante Funktion g(x) sein)

Eine DGL ist nicht-linear, wenn z.B. Terme der Form y^n, $y \cdot y''$, sin(y), ln(y), |y| o.ä. auftauchen.

Ü

Übung: Interpretieren Sie die nachfolgenden DGLs:

(a) $y'(x) = -2x$ ____________________

(b) $x + yy' = 0$ ____________________

(c) $\ddot{s}(t) = g$ ____________________

(d) $y'' + y = 0$ ____________________

(e) $2y''-4y'+20y=\cos(\omega x)$

12.3. Lösung einfacher Differentialgleichungen

12.3.1. Nur ein Ableitungsterm

DGLs, in denen nur ein Ableitungsterm auftritt, lassen sich oft recht einfach durch Integrieren lösen:

Beispiel freier Fall:

$\ddot{s}(t)=-g$

1. Integration $\Rightarrow$ $\int \ddot{s}(t)dt=-\int g dt$ $\Rightarrow$ $\dot{s}(t)=-gt+C_1$ (1)

2. Integration $\Rightarrow$ $\int \dot{s}(t)dt=\int(-gt+C_1)dt$ $\Rightarrow$ $s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1 t+C_2$ (2)

Aktivierung: Welche Bedeutung haben die Integrationskonstanten $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$?

ANTWORT:

Bem.:

1. Die Lösung mit unbestimmten Integrationskonstanten C_1 und C_2 heißt **allgemeine** Lösung der DGL.
2. Eine DGL n. Ordnung hat n unbestimmte Konstanten (freie Parameter).
3. Eine Lösung mit bestimmten Werten für C_1 und C_2 heißt **spezielle** (**partikuläre**) Lösung der DGL.
4. Legt man bei einer DGL n. Ordnung n Anfangswerte fest, so erhält man genau eine spezielle Lösung (**Anfangswertproblem**).

Ü

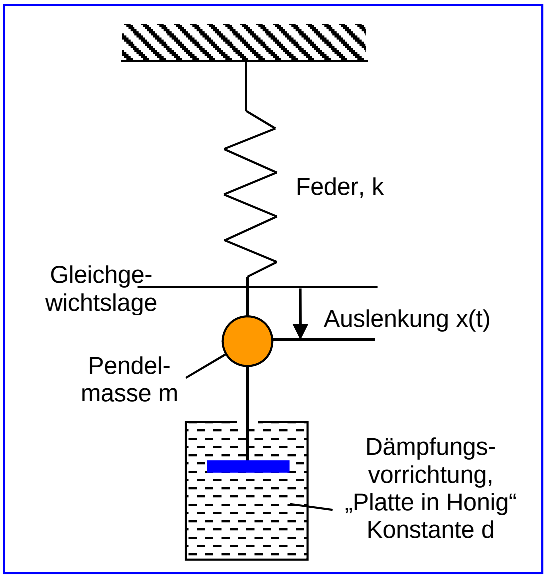
Übung: Gegeben sei $\ddot{s}(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$.

(a) Interpretieren Sie die DGL (Ordnung, explizit, linear, homogen)

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung s(t)

(c) Wie lautet die spezielle Lösung für $\dot{s}(1)=2$ und $s(1)=2$?

12.3.2. Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten



Aktivierung: Welche Kräfte wirken am Federpendel?

ANTWORT:

Es ergibt sich also eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten:

(1) $$\ddot{x}(t) + \frac{d}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Homogene lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

lassen sich besonders einfach lösen durch den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbf{C}$.

Satz S 12-3: Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

1) **Spezielle Lösungen** einer homogenen linearen DGL ermittelt der Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t} \text{ mit } \lambda \in \mathbf{C}$$

2) **Superpositionsprinzip**: Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen einer homogenen linearen DGL, so ist auch jede Linearkombination

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

eine (allgemeine) Lösung dieser DGL mit $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$.

3) **Real- und Imaginärteil als Lösung**: Ist $x(t)$ eine (komplexe) Lösung der homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten und **reellen** Koeffizienten, so sind auch Realteil $\mathrm{Re}(x(t))$ und Imaginärteil $\mathrm{Im}(x(t))$ (eigenständige) Lösungen dieser homogenen linearen DGL. Es ist

$$a\,\mathrm{Re}(x(t)) + b\,\mathrm{Im}(x(t))$$

eine (allgemeine) Lösung dieser DGL. Wählt man $a, b \in \mathbf{R}$, so ist die Lösung rein reell.

Herleitung in Vorlesung.

Anmerkung: Das Superpositionsprinzip enthält als Spezialfall (für $x_2(t)=0$) die Aussage, dass mit $x_1(t)$ auch jedes Vielfache $c_1 x_1(t)$ eine Lösung der DGL ist.

Beispiel: Ein radioaktiver Zerfall werde beschrieben durch die DGL $\dot{x}(t) = 0.05x(t)$. Wie lautet x(t), wenn x(0)=4 gelten soll?

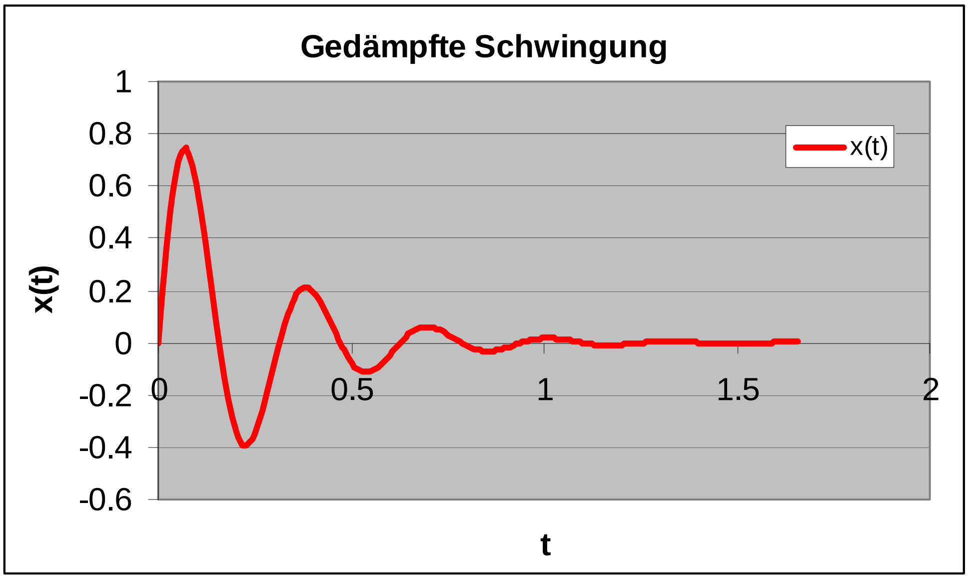
Lösung: Der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ liefert $\lambda e^{\lambda t} = 0.05 e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.05$.

Die allgemeine Lösung lautet gem. Superpositionsprinzip $x(t) = c_1 e^{0.05t}$. Die Bedingung $x(0)=c_1=4$ führt auf $x(t) = 4e^{0.05t}$.

Übung 1: Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0$
(Dies ist eine Gleichung vom Typ „Ungedämpftes Federpendel" mit d/m=0 und k/m=4)

Übung 2: Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 404\,x(t) = 0$
(Dies ist eine Gleichung vom Typ „Gedämpftes Federpendel" mit d/m=4 und k/m=404)

Eine spezielle Lösung dieser DGL sieht wie folgt aus (Mathe-Reihen-V2.xls, Blatt "DGL Schwingung"):



Übung: Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x}(t) - 9x(t) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad x(0) = 0$$

12.4. Fazit Differentialgleichungen

Wir sehen hier den großen Vorteil komplexer Zahlen: Durch den Ansatz $x(t) = ae^{\lambda t}$ mit $\lambda, a \in \mathbb{C}$ lassen sich ganz verschiedenartige Probleme (radioaktiver Zerfall, ungedämpfte Schwingung, gedämpfte Schwingung, elektromagnetischer Schwingkreis) in EINEM Framework lösen.

$\Rightarrow$ „ONE SIZE FITS ALL!"

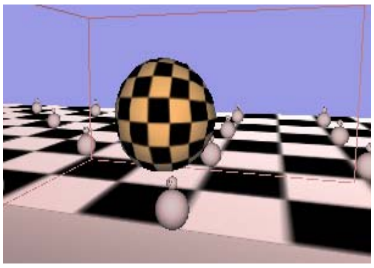
Was hängenbleiben sollte:

- die Typisierung von DGLs: **explizit/implizit, homogen/inhomogen, linear/nichtlinear**.
- Homogene lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten löst man mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbf{C}$. und kann damit eine Reihe von DGLs aus ganz verschiedenen Anwendungsbereichen einheitlich lösen („ONE SIZE FITS ALL")

12.4.1. Where to go from here

Dies war nur eine sehr kurze Einführung in das faszinierende und wichtige Gebiet der Differentialgleichungen. Einige weiterführende Vertiefungen:

- Was die umstürzende Brücke mit DGLs zu tun hat, konnten wir in dieser kurzen Einführung noch nicht ganz erklären. Wer es genau wissen will → Informatik-Master studieren, in der SGM-Vorlesung (Spezielle Gebiete der Mathematik) gehen wir der Sache auf den Grund.
- DGLs spielen eine zentrale Rolle bei Modellierung und Simulation. Anwendung in der Informatik z.B. in Game Physics, der physikalischen Modellierung in Computerspielen [Bild]. Wer hier mehr lernen will: **WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme** (W. Konen)



- Viele DGLs lassen sich nur schwer analytisch lösen. Hier kommt **Maple** ins Spiel, das besonders stark darin ist, solche analytischen Lösungen zu finden.
- Manche (viele) DGLs lassen sich gar nicht analytisch lösen. Diese werden dann numerisch gelöst, z.B. **Runge-Kutta-Verfahren**. Eine Einführung zu einfachen numerischen Lösungsverfahren gibt **WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme**.
- Ein weiteres Feld sind **Systeme von DGLs**. Beispiel **Crashtest**: Ein Fahrzeug wird in ein Netz von 10000 einzelnen Punkten zerlegt, deren DGLs simultan (meist numerisch) gelöst werden.
- Wieso ist es trotzdem wichtig, einfache DGLs (wie hier z.B. lineare DGLs) analytisch zu lösen? – Weil sich viele komplizierte DGLs in der Nähe **stationärer Punkte** (nahe an einem Ruhezustand) **linearisieren** lassen und dann wichtige Teilaspekte in dieser Näherung analytisch verstanden werden können. Über den analytischen Weg gelangt man oft zu einer tieferen Einsicht in die Zusammenhänge.

Womit wir wieder am Anfang wären:

Das Ziel des Rechnens ist Einsicht, nicht Zahlen.
[Richard Hamming, 1915-1998]