

# Zufallsvariablen rekapituliert

Wolfgang Konen

TH Köln, Campus Gummersbach

April 2016 – Mai 2017

## 1 Einleitung

## 2 Zufallsvariablen

## 3 Linearität und Varianz

## 4 Anhang

- Beweis Linearität Erwartungswert, diskret
- Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

# Einleitung

(Diese Folien dienen als Ergänzung zum Skript MA2, nicht als dessen Ersatz.)

# Einleitung

(Diese Folien dienen als Ergänzung zum Skript MA2, nicht als dessen Ersatz.)

**Kombinatorik:** muss Wahrscheinlichkeit  $P$  für jedes Ereignis neu rechnen

- z.B. 6 Richtige, 5 Richtige, 4 ... im Lotto
- → mühsam

# Einleitung

(Diese Folien dienen als Ergänzung zum Skript MA2, nicht als dessen Ersatz.)

**Kombinatorik:** muss Wahrscheinlichkeit  $P$  für jedes Ereignis neu rechnen

- z.B. 6 Richtige, 5 Richtige, 4 ... im Lotto
- → **mühsam**

**Zufallsvariablen:** Über viele Ereignisse gemeinsam nachdenken

- Voraussetzung: Es gibt einen Zahlenwert, den man jedem Ereignis zuordnen kann
- z.B.  $x_m = 6, 5, 4, \dots$  beim Lotto
- → **einfacher zu rechnen**
- → **geht auch für unendlich viele  $x_m$**   
( $\mathbb{Z}$ : abzählbar oder  $\mathbb{R}$ : überabzählbar viele)

# Begriffe

**Zufallsvariable:** ist eine **Funktion**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (keine Variable)

# Begriffe

**Zufallsvariable:** ist eine **Funktion**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (keine Variable)

**Wahrscheinlichkeitsdichte:** ist eine **Funktion**  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$

- zusätzliche Eigenschaft:  $\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1$

# Begriffe

**Zufallsvariable:** ist eine **Funktion**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (keine Variable)

**Wahrscheinlichkeitsdichte:** ist eine **Funktion**  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$

- zusätzliche Eigenschaft:  $\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1$

**Erwartungswert, Varianz:**  $E(X)$  und  $Var(X)$  sind bloße reelle Zahlen

- (genauso wie  $f(x)$  für Funktion  $f$  eine Zahl ist)

# Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

# Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

<b>diskret</b> (o.B.d.A. $x_m \in \mathbb{Z}$ )	<b>stetig</b> ( $x_m \in \mathbb{R}$ )
Wahrscheinlichkeit:  $w_m = P(X = x_m)$ $= P(x_{m-1} < X \leq x_m)$	Wahrscheinlichkeitsdichte:  $w(t)\Delta t =$ $P(t - \Delta t < X \leq t)$

# Zufallsvariable

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

<b>diskret</b> (o.B.d.A. $x_m \in \mathbb{Z}$ )	<b>stetig</b> ( $x_m \in \mathbb{R}$ )
Wahrscheinlichkeit:  $w_m = P(X = x_m)$ $= P(x_{m-1} < X \leq x_m)$	Wahrscheinlichkeitsdichte:  $w(t)\Delta t =$ $P(t - \Delta t < X \leq t)$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m = 1 \quad (1)$	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(t_m)\Delta t =$ $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = 1 \quad (2)$ <p><math>(t_m = t_{m-1} + \Delta t)</math></p>

# Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

# Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

<b>diskret</b>	<b>stetig</b>
Verteilungsfunktion $F$	

# Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

**diskret**

**stetig**

Verteilungsfunktion  $F$

$$\begin{aligned}
 F(x_m) &= P(X \leq x_m) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^m w_k \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(t) &= P(X \leq t) \\
 &= \int_{-\infty}^t w(t') dt' \quad (4)
 \end{aligned}$$

# Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

**diskret**

**stetig**

Verteilungsfunktion  $F$

$$\begin{aligned} F(x_m) &= P(X \leq x_m) \\ &= \sum_{k=-\infty}^m w_k \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t) &= P(X \leq t) \\ &= \int_{-\infty}^t w(t') dt' \quad (4) \end{aligned}$$

Erwartungswert  $E(X)$

# Zufallsvariable (2)

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

diskret	stetig
Verteilungsfunktion $F$	
$  \begin{aligned}  F(x_m) &= P(X \leq x_m) \\  &= \sum_{k=-\infty}^m w_k \quad (3)  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  F(t) &= P(X \leq t) \\  &= \int_{-\infty}^t w(t') dt' \quad (4)  \end{aligned}  $
Erwartungswert $E(X)$	
$E(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m w_m \quad (5)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t w(t) dt \quad (6)$

# Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft  $\mu = E(X)$ .

# Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft  $\mu = E(X)$ .

Der **diskrete Erwartungswert**  $E(X) = \sum_m x_m w_m$  nach Gl. (5) wichtet jeden Wert  $x_m$  von  $X$  mit seiner Wahrscheinlichkeit  $w_m$ .

# Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft  $\mu = E(X)$ .

Der **diskrete Erwartungswert**  $E(X) = \sum_m x_m w_m$  nach Gl. (5) wichtet jeden Wert  $x_m$  von  $X$  mit seiner Wahrscheinlichkeit  $w_m$ .

**Beispiel:** Hat  $X$  die Werte  $x_m = 0$  und  $10$  mit Wahrscheinlichkeit  $P(X = 0) = 95\%$  und  $P(X = 10) = 5\%$ , so ist der Erwartungswert

$$E(X) = 0 \cdot 95\% + 10 \cdot 5\% = 0.5$$

BEACHTE: Auch wenn alle  $x_m \in \mathbb{Z}$ , so ist i.allg.  $E(X) \notin \mathbb{Z}$ .

# Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine **bloße Zahl**. Man schreibt oft  $\mu = E(X)$ .

Der **diskrete Erwartungswert**  $E(X) = \sum_m x_m w_m$  nach Gl. (5) wichtet jeden Wert  $x_m$  von  $X$  mit seiner Wahrscheinlichkeit  $w_m$ .

**Beispiel:** Hat  $X$  die Werte  $x_m = 0$  und  $10$  mit Wahrscheinlichkeit  $P(X = 0) = 95\%$  und  $P(X = 10) = 5\%$ , so ist der Erwartungswert

$$E(X) = 0 \cdot 95\% + 10 \cdot 5\% = 0.5$$

BEACHTE: Auch wenn alle  $x_m \in \mathbb{Z}$ , so ist i.allg.  $E(X) \notin \mathbb{Z}$ .

Der **stetige Erwartungswert** nach Gl. (6) benutzt das Integral, das der Grenzwert einer Summe mit  $\Delta t \rightarrow 0$  ist (siehe Gl. (2)).

# Linearität Erwartungswert

Folgende Sätze und Definitionen gelten gleichartig für diskrete und stetige Zufallsvariablen:

## Satz 10-6 Linearität Erwartungswert

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1  $E(aX + b) = aE(X) + b$
- 2  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Beweis diskret

Beweis stetig

# Varianz einer Zufallsvariablen

## Def 10-15

Hat  $X$  den Erwartungswert  $E(X) = \mu$  so ist die **Varianz** von  $X$ :

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel der Varianz:  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

# Varianz einer Zufallsvariablen

## Def 10-15

Hat  $X$  den Erwartungswert  $E(X) = \mu$  so ist die **Varianz** von  $X$ :

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel der Varianz:  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

Die Varianz gibt an, wie sehr die Ergebnisse für  $X$  um den Wert  $E(X)$  herum streuen: gar nicht (Varianz Null), wenig (Varianz klein) oder viel (Varianz groß).

# Varianz einer Zufallsvariablen

## Def 10-15

Hat  $X$  den Erwartungswert  $E(X) = \mu$  so ist die **Varianz** von  $X$ :

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel der Varianz:  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

Die Varianz gibt an, wie sehr die Ergebnisse für  $X$  um den Wert  $E(X)$  herum streuen: gar nicht (Varianz Null), wenig (Varianz klein) oder viel (Varianz groß).

diskret	stetig
$\text{Var}(X) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x_m - \mu)^2 w_m$	$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 w(t) dt$

# Anhang

# Beweis Linearität Erwartungswert, diskret

Seien  $X, Y$  diskrete Zufallsvariablen mit Werten  $x_m, y_n$  und Wahrscheinlichkeiten  $w_m^{(X)}, w_n^{(Y)}$ :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad E(aX + b) &\stackrel{(5)}{=} \sum_m (ax_m + b)w_m^{(X)} \\ &= a \left( \sum_m x_m w_m^{(X)} \right) + b \left( \sum_m w_m^{(X)} \right) \\ &\stackrel{(5),(1)}{=} aE(X) + b \end{aligned}$$

# Beweis Linearität Erwartungswert, diskret

Seien  $X, Y$  diskrete Zufallsvariablen mit Werten  $x_m, y_n$  und Wahrscheinlichkeiten  $w_m^{(X)}, w_n^{(Y)}$ :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad E(aX + b) &\stackrel{(5)}{=} \sum_m (ax_m + b)w_m^{(X)} \\
 &= a \left( \sum_m x_m w_m^{(X)} \right) + b \left( \sum_m w_m^{(X)} \right) \\
 &\stackrel{(5),(1)}{=} aE(X) + b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad E(X + Y) &= \sum_n \sum_m (x_m + y_n)w_m^{(X)}w_n^{(Y)} \\
 &= \left( \sum_m x_m w_m^{(X)} \right) \left( \sum_n w_n^{(Y)} \right) + \left( \sum_m w_m^{(X)} \right) \left( \sum_n y_n w_n^{(Y)} \right) \\
 &\stackrel{(1)}{=} E(X) \cdot 1 + 1 \cdot E(Y)
 \end{aligned}$$

# Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

Seien  $X, Y$  stetige Zufallsvariablen mit Werten  $t, u$  und Wahrscheinlichkeitsdichten  $w_X(t), w_Y(u)$ :

① ... (als Übung)

# Beweis Linearität Erwartungswert, stetig

Seien  $X, Y$  stetige Zufallsvariablen mit Werten  $t, u$  und Wahrscheinlichkeitsdichten  $w_X(t), w_Y(u)$ :

① ... (als Übung)

②

$$\begin{aligned}
 & E(X + Y) \\
 \stackrel{(6)}{=} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t + u) w_X(t) w_Y(u) dt du \\
 = & \left( \int_{-\infty}^{\infty} t w_X(t) dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} w_Y(u) du \right) + \left( \int_{-\infty}^{\infty} w_X(t) dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} u w_Y(u) du \right) \\
 \stackrel{(6),(2)}{=} & E(X) \cdot 1 + 1 \cdot E(Y)
 \end{aligned}$$

Zurück