

V MA 2 - 16.4.18

Prakt Einf PFLICHT

Mi, 18.4.18, 11⁰⁰, 0.401

Tut MA 2

Mi, 13-14³⁰, 0.502, Beginn
18.4.

(Jan Schröder
canich Dittmar)

Wdh

Laplace-Spezialfall: $P(A) = \frac{\text{für } A \text{ günstige Fälle}}{\text{alle Fälle}}$

Urn-Experiment: ...

Kombinatorik

"Kunst des Zählens"

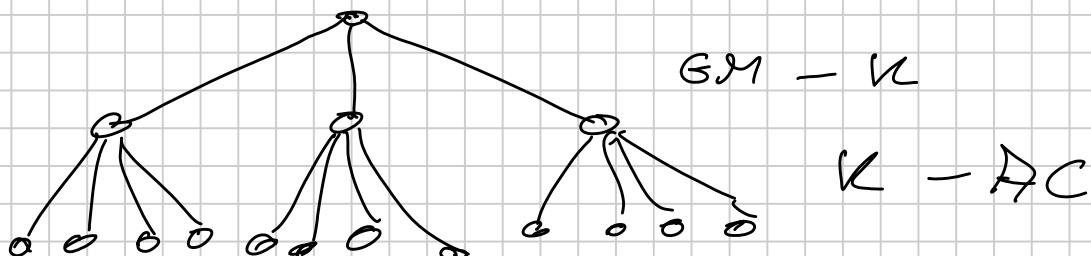
faire Würfel: jede Augenzahl mit $p = \frac{1}{6}$

Variation: Reihenfolge wichtig

Kombination: " unwichtig

Produktregel:

Zerlege Problem in Teilprobleme,
die nacheinander entschieden werden,
dann ist $n(\text{gesamt}) = n(\text{Teil 1}) \cdot n(\text{Teil 2})$



Bew zu S 10-4 (Stichproben)

a) $Z \times Z$, Variation: Produktregel k -mal

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k$$

b) $Z \circ Z$, Variation: Produktregel k -mal:

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k\text{-mal}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

c) $Z \circ Z$, Kombination, d.h. $[1, 2, 5]$
und $[5, 2, 1]$

sind dieselbe Kombination (zählen nur 1-mal) $\{1, 2, 5\}$

(Bsp für $k=3$)

$[1, 2, 5]$

$[1, 5, 2]$

$[2, 1, 5]$

$[2, 5, 1]$

$[5, 1, 2]$

$[5, 2, 1]$

6 Möglichkeiten

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

allgemein haben wir
für k -elementige Listen
 $k!$ Permutationen

$\Rightarrow$ Nehme das Ergebnis aus b) und
dividiere die $k!$ Mehrfachzählungen
heraus:

$$N = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \binom{n}{k}$$

Bsp Binomischer Satz

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)}_{n\text{-mal}}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{a^n} + \underbrace{b \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{a^{n-1}b} + \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{a^{n-1}b} + \dots$$

kommt 1mal vor $a^{n-1}b$ kommt nmal

Wie oft kommt ein Term mit k b 's vor, also $a^{n-k}b^k$?

k	Anz
0	1
1	n
2	$\binom{n}{2}$
$\vdots$	$\vdots$

Antwort: Die Platzierung der k b 's auf n Positionen kann ich gedanklich so machen:

Ziehe k -mal aus der Positionsmenge $\{1, 2, \dots, n\}$

ZoZ, Reihenfolge egal $\Rightarrow \underline{\underline{\binom{n}{k}}}$

Insgesamt läßt sich die obige (lange) Summe zusammenfassen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \text{ q.e.d.}$$

Systematik

1. Kann ich mein Problem in Teilschritte zerlegen
 a) Ja: jeden Teilschritt getrennt, Produktregel
 b) Nein: Gesamtproblem

2. Ist Reihenfolge wichtig?
- a) Ja: Variation (Liste)
 - b) Nein: Kombination (Menge)
3. Treten Elemente mehrfach auf?
- a) Ja: $\mathbb{Z}_m \mathbb{Z}$
 - b) Nein: $\mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$

Box für Schritt 2+3 wird für etwaige Teilschritte mehrfach durchlaufen

Übungen

Ü 1 a) $n = 26$, $k = 4$, $\Sigma^m \Sigma$
Variation
("aaa" gültiges Wort)
("abcd" $\neq$ "abcde")

b) $n = 5$, $k = 4$, $\mathbb{Z} \text{ m } \mathbb{Z}$, Var.

Anzahl 5^4

nach Laplace : $P(\text{"erste 5"}) = \frac{5^4}{26^4} = 0.13\%$

ü2 a) Z0Z, Variation $\Rightarrow 8 \cdot 7 \cdot 6$ Wettränge
 $= \frac{8!}{5!} = \underline{\underline{336}}$

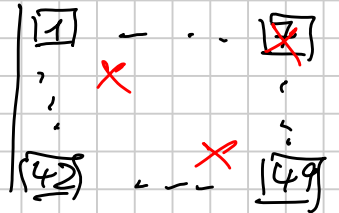
b) Der Erste sei richtig, dann gibt es für Pos 2+3 noch $\frac{7!}{(7-2)!} = 7 \cdot 6 = 42$ Möglichkeiten

Also: $P(\text{"Erster richtig"}) = \frac{42}{336} = \frac{1}{8} = 12.5\%$

Ü3 (Lotto)

a) ZZZ, Kombination

$$\text{Anzahl } \binom{49}{6} \approx 13.9 \cdot 10^6$$

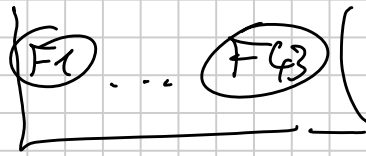


b) Jede Ziehung hat 6 Richtige, 43 Falsche



4 mal

$$\text{Anzahl } \binom{6}{4}$$



2 mal

$$\text{Anzahl } \binom{43}{2}$$

⇒ Wertscheine
mit genau 4 Richt.

$$\text{Insgesamt } P(\text{"4 Richtige"}) \underset{\text{Laplace}}{=} \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0.000968 \approx \frac{1}{1000}$$