

Wdh

V MA 2 - 25.4.2018

Erwartungswert

diskrete Zuf. variable: endlich viele Werte
abzählbar ∞ viele

↳ Analogie-Bild: Speicherzelle

$$\text{Erwartungswert } E(X) = \sum_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wert}}}{x_m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahrsch.}}}{p_m}$$

stetige Zufallsvariable: ∞ viele Werte aus
Intervall (reellen Zahl)

$$\text{Erwartungswert } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wert}}}{x} \underbrace{w(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}}} dx$$

Bsp zu Varianz bei diskreter Zufallsvariable

Tab Touristikern

$X = \text{Anz. Reisende}$ x_m	rel. Häuf. $h_m = p_m$	$x_m \cdot p_m$	v_m $(x - E(X))^2$	$v_m \cdot p_m$
1	10.70%	0.107	1.974	0.211
2	51.30%	1.026	0.164	0.084
3	28.00%	0.840	0.354	0.099
4	6.80%	0.272	2.544	0.173
5	3.20%	0.160	6.734	0.215
	100 %	2.405 = $E(X)$		0.783 = $\text{Var}(X)$

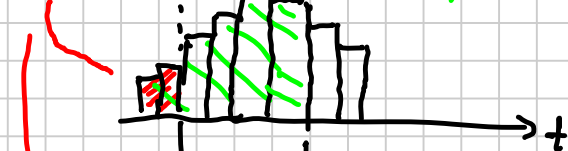
$= \sum x_m p_m$

↑
2. B. $v_1 = (1 - 2.405)^2 = 1.974$

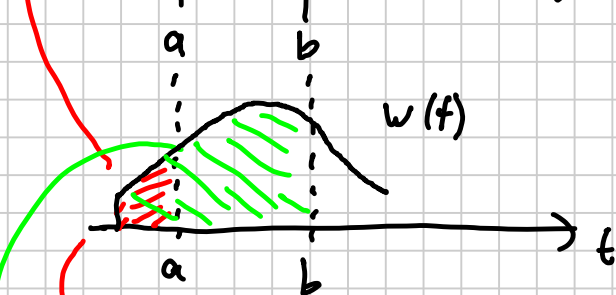
Ausgangspunkte Herleitung Wahrsch. dichte



$P(X \leq a)$



$P(X \leq b)$



$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a w(t) dt$$

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b w(t) dt$$

$$\begin{aligned} P(X \leq a) + P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) \\ \Rightarrow P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

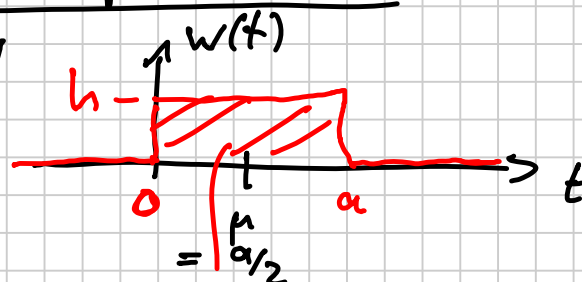
$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= \int_a^b w(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^b w(t) dt - \int_{-\infty}^a w(t) dt \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

$F(t)$: Stammfkt zu $w(t)$

Beispiel Varianz für stetige Zuf. variable

Sei X gleichverteilt in $[0, a]$

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Was ist $E(X)$ und $\text{Var}(X)$?

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot w(t) dt$$

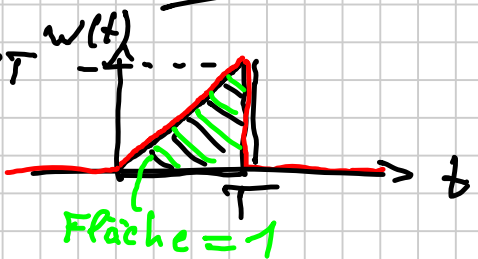
$$= \int_0^a t \cdot \frac{1}{a} dt$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^a = \underline{\underline{\frac{a}{2}}}$$

$100\% = \text{Fläche } 1$
 $\Rightarrow h = \frac{1}{a}$
 (denn $a \cdot \frac{1}{a} = 1$)

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 = \text{Var}(X) &= \int_0^a (t - \mu)^2 w(t) dt \\
 &= \int_0^a \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} dt \\
 &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{a}{2}\right)^3 \right]_0^a \\
 &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{a}{2}\right)^3 \right] = \underline{\underline{\frac{a^2}{12}}}
 \end{aligned}$$

Ü4 $w(t) = \begin{cases} \alpha t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



nur a) + b) Was ist $E(X)$?

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^T t w(t) dt = \int_0^T t \alpha t dt = \alpha \int_0^T t^2 dt = \alpha \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^T \\
 &= \underline{\underline{\frac{\alpha T^3}{3}}}
 \end{aligned}$$

Was ist α ?

Fläche unter $w(t)$ muss 1 sein

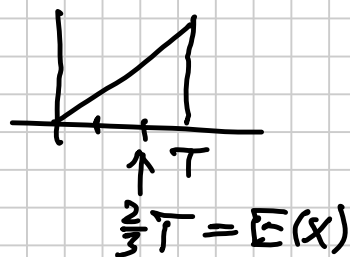
Lsg 1: Dreiecksfläche $\frac{T \cdot \alpha T}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{T^2}$

Lsg 2: $\int_0^T w(t) dt = \int_0^T \alpha t dt = 1 \Rightarrow \alpha \frac{1}{2} T^2 = 1$

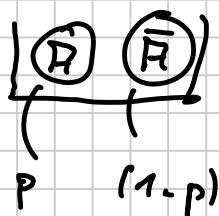
$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{T^2}$$

Damit wird

$$E(X) = \frac{\alpha T^3}{3} = \frac{2}{T^2} \cdot \frac{T^3}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3} T}}$$



Binomialverteilung



Stichprobe der Länge n

erhalte ich durch $n \cdot \text{ZurZ}$

Beim Ergebnis ist Reihenfolge egal,
wichtig ist nur $k \cdot A$ und $(n-k) \cdot \bar{A}$

→ $\binom{n}{k}$ Ergebnisse mit $k \cdot A$
kombinatorik genau

z.B. $(A, \bar{A}, \bar{A}, A, A)$ ($n=5, k=3$)

Wahrsch $p (1-p)(1-p) p p = p^3 \cdot (1-p)^2$