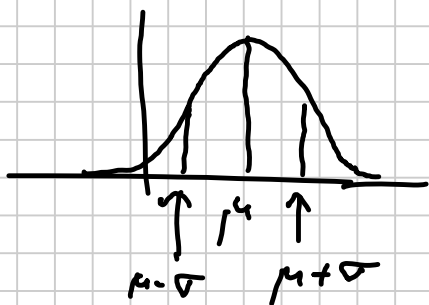


V MA 2 - 02.05.2018

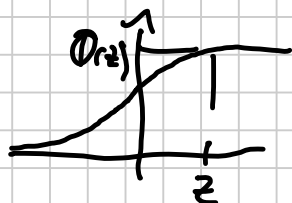
Wdh

Gaußverteilung
= Normalverteilung

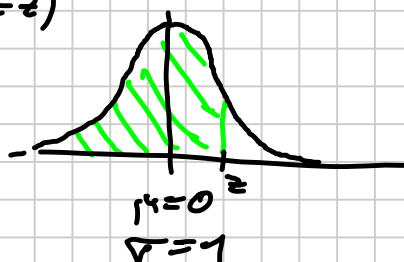


für
stetige
Zufallsvariable

Verteilungsfunktion $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z w(z) dz$
 $P(Z \leq z)$



Z sei $N(0, 1^2)$ -verteilt



Regel Nr. 3: $F(b) = P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

$$\text{denn: } P(X \leq b) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \stackrel{\text{Nr. 2}}{=} P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \underline{\underline{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}}$$

Regel Nr. 4:

$$P(a \leq X \leq b) \stackrel{\text{Satz 10-8}}{=} F(b) - F(a) \stackrel{\text{Nr. 3}}{=} \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Regel Nr. 5:

Nr. 1
($\Rightarrow$)

$$1-q = \Phi(-z_q)$$

$$1-q = 1 - \Phi(z_q)$$

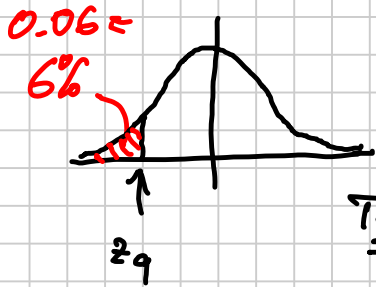
($\Rightarrow$)

$$q = \Phi(z_q)$$

Bsp zu Normalverteilung (q-Quantil)

Gruppe v. Menschen hat normalverteilte Körpergrößen X mit $\mu = 1.75$, $\sigma = 0.20$ m

Was ist die Körpergröße, die Menschen nicht überschreiten, die zum 0.06-Quantil gehören?



Lsg. $0.06 = P(Z \leq z_q) = \Phi(z_q)$

Nr. 5 $\Rightarrow 1 - 0.06 = 0.94 = \Phi(-z_q)$

$-z_q = 1.56$

Tabelle $\Rightarrow$

$\Rightarrow$
Nr. 6
 $\Rightarrow$

$z_q = -1.56$

$x_q = z_q \cdot \sigma + \mu$

$= (-1.56) \cdot 0.2 + 1.75$

$= \underline{\underline{1.438}}$

$\underbrace{1.56}_{\substack{z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow \\ z\sigma + \mu = x}}$

zur Übung
ü2, ü4, ü5

Ü4 X ist $N(2, 1^2)$ -verteilt. Wie groß ist $P(1.5 < X \leq 2.5)$?
Lsg: $\mu = 2$, $\sigma = 1$

Regel 4: $P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$

$\Rightarrow P(1.5 < X \leq 2.5) = \Phi\left(\frac{2.5 - 2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1.5 - 2}{1}\right)$

$= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) \underset{\text{Nr. 1}}{=} \Phi(0.5) - (1 - \Phi(0.5)) = 2\Phi(0.5) - 1$

Tabelle vorwärts
 $=$

$2 \cdot 0.6915 - 1 \approx \underline{\underline{40\%}}$

Ü5 Wo liegt das 0.8-Quantil einer $N(3, 2^2)$ -verteilten Zufallsvariablen X ?
 $\mu = 3$, $\sigma = 2$

Lsg: z_q ist 0.8-Quantil der $N(0, 1^2)$ -Verteilung

Tabelle rückwärts
 $\Rightarrow$

$z_q = 0.84$

Nr. 6 $\Rightarrow$

$x_q = z_q \cdot \sigma + \mu$

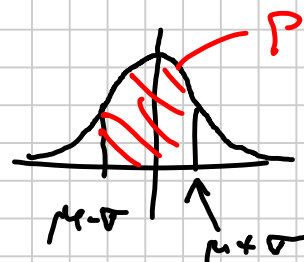
$$\Rightarrow x_q = 0.84 \cdot 2 + 3$$

$$= \underline{\underline{4.68}}$$

Ü2) X sei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Wie groß ist die Wahrsch., dass X im 1σ ($2\sigma, 3\sigma$)-Intervall um μ herum liegt?

Lsg: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

Nr. 4 $\stackrel{=}{=} \Phi\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right)$



$$= \Phi(1) - \Phi(-1)$$

Nr. 1 $\stackrel{=}{=} \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 \approx \underline{\underline{68.2\%}}$

Analog: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

$$\dots = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \approx \underline{\underline{95.5\%}}$$

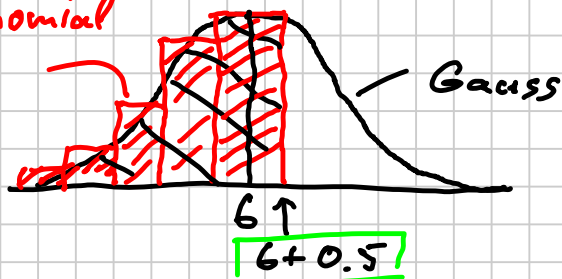
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 \approx \underline{\underline{99.7\%}}$$

Satz von Moivre-Laplace

Woher kommt "+0.5"?

Bsp: $n = 12, p = 0.5 \Rightarrow \mu = np = 6$

Binomial



$$P(X \leq 6) \stackrel{\text{Binomial}}{=} \Phi\left(\frac{6+0.5 - \mu}{\sigma}\right) \stackrel{\text{Gauss}}{=}$$

Binomialverteilung diskret: $P(X=6)$ hat Wert > 0