V MA2 – 09.05.2018

nä V MA2 : Mi 23.05

Wdh: Bedingte Wahrscheinlichkeit
Bayes Regel

Bedingte Wahrsch. reloaded

1) Satz von totalen Wahrsch.
2) Satz von Bayes
3) Statist. Unabhängigkeit

Bsp Mammographie

Wahrsch. f. Brustkrebs sei 1%
Ein Mammographietest habe folgende Zuverlässigkeits-Quoten

	krank (kr)	gesund (g)
pos	95%	10%
neg	5%	90%
	100%	100%

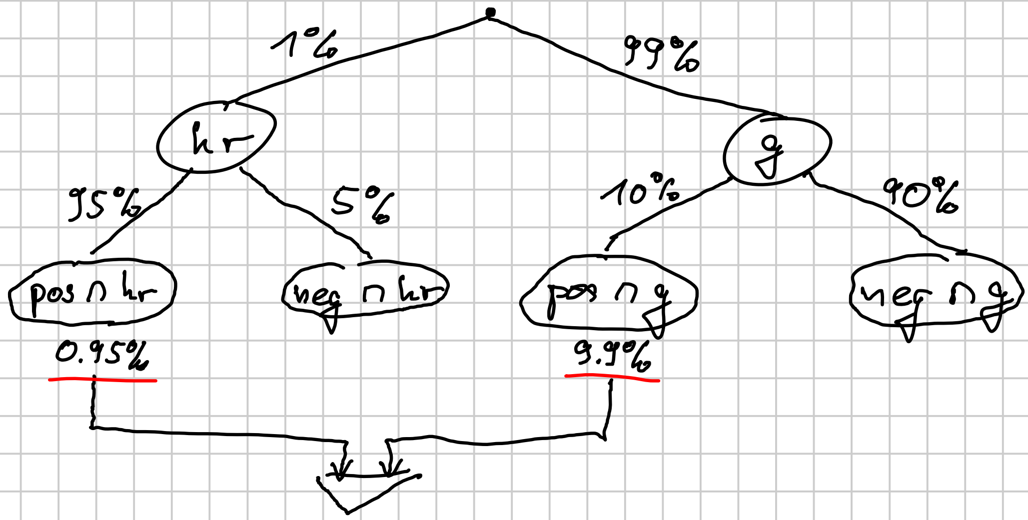
d.h. z.B. $P(\text{pos} \mid \text{kr}) = 95\%$

Wie wahrsch. ist eine positiv getestete Frau krank?

Schätzen!

	A	B	C
	< 30%	30 - 60%	> 60%
n	4	12	23

Lsg: Wir suchen $P(kr \mid pos)$



1. Was ist $P(pos)$

$$P((pos \cap kr) \cup (pos \cap g)) = 0.95 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 0.10$$

$$= P(pos \cap \underbrace{(kr \cup g)}_{\Omega}))$$

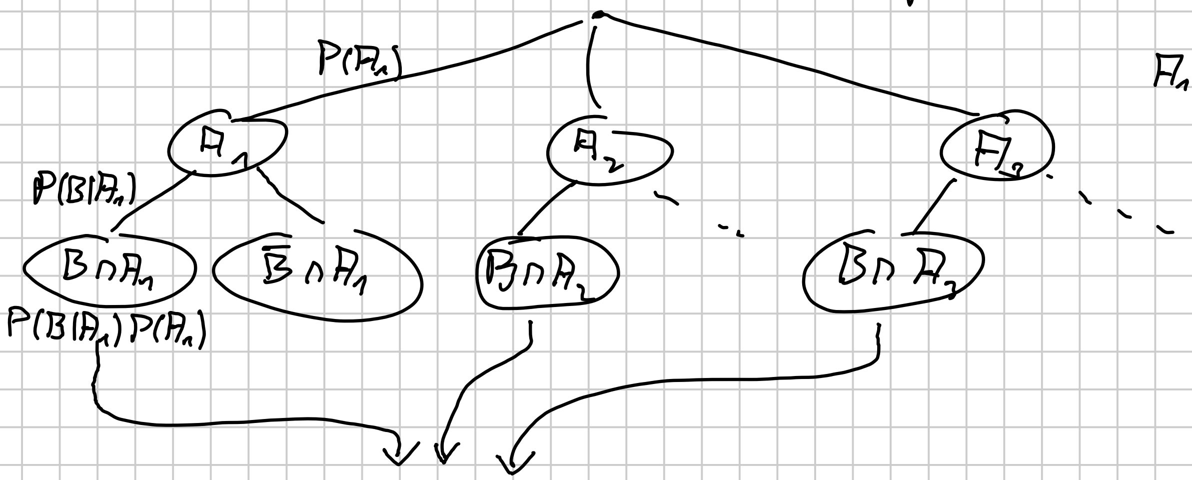
$$= P(pos) = 10.85\%$$

Bayes $$P(kr \mid pos) = \frac{\overset{95\% \,\cdot\, 1\%}{P(pos \mid kr)\, P(kr)}}{P(pos)} =$$

$$= \frac{0.95\%}{0.95\% + 9.9\%} \approx \underline{\underline{8.7\%}}$$

Zusätzl. tot. Wahrsch. bei 3 Möglichkeiten A_i

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$$



$$P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3))$$

$$= P(B \cap \underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}_{\Omega})$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= P(B) \\ &= \sum_{i=1}^{3} P(B \mid A_i)\, P(A_i) \end{aligned}}$$

Analog für 4 oder mehr

Bsp Spracherkennungssysteme

B_i : Buchstabenfolgen ("sch", "ng", ...)

A_j : Phonemen, Lauten d. jew. Nutzers

Trainingsphase: $P(A_j \mid B_i)$

Nutzungsphase: $P(B_i \mid A_j)$ via Bayes

Statistische Unabhängigkeit

Bsp. Kartenspiel 52 Blatt: 12 Bildkarten, 40 Zahlkarten

$$P(\text{Bube}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Frage: Erhöht sich die Wahrsch f. Bube wenn Sie die Zusatzinfo bekommen

a) S : "nächste Karte schwarz"

b) BK : " " " Bildkarte "

Def: Zwei Ereignisse A, B mit $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ sind statistisch unabhängig wenn $\boxed{P(A \mid B) = P(A)}$

Folgerung 1) $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

2) $\dfrac{P(B \mid A)\cancel{P(A)}}{P(B)} = \cancel{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(B \mid A) = P(B)}$

Lsg Kartenspiel

a) $P(\text{Bube}) = \frac{4}{52} = P(\text{Bube} \mid S) = \frac{2}{26} \Rightarrow$ stat. unabhängig

Zusatzinfo S hilft nicht.

[Alt.: $P(\text{Bube} \cap S) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} = P(\text{Bube}) \cdot P(S) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2}$]

b) $P(\text{Bube}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \neq P(\text{Bube} \mid BK) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ stat. abhängig

$\Rightarrow$ Zusatzinfo B/C hilft.

Frage: Sind unvereinbare Ereignisse stat. unabhängig ?

Antwort: I.a. nein. Denn: "unvereinbar" heißt $P(A \cap B) = 0$

I.d.R. $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$

$$P(A) \cdot P(B) \neq 0 \neq P(A \cap B) = 0$$

$\Rightarrow$ stat. abhängig

Bsp: Wenn ich nie auf Party gehe, auf der mein pers. Feind ist, verhalte ich mich sehr abhängig

Komplexe Zahlen

$$z_1 + z_2$$

$$= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_2)}_{Re} + i\underbrace{(b_1 + b_2)}_{Im}$$

$$z_1 \cdot z_2$$

$$= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$$

$$= a_1 a_2 + ib_1 a_2 + a_1 i b_2 + \underbrace{i^2}_{=-1} b_1 b_2$$

$$= \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_{Re(z_1 z_2)} + i\underbrace{(b_1 a_2 + a_1 b_2)}_{Im(z_1 z_2)}$$