

Multiplikation komplexer Zahlen

$$\begin{aligned}
 z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\
 &= a_1 a_2 + (ib_1)(ib_2) + ib_1 a_2 + a_1 ib_2 \\
 &= a_1 a_2 + \underbrace{i^2}_{=-1} b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) \\
 &= \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_{\text{Re}(z_1 z_2)} + i \underbrace{(b_1 a_2 + a_1 b_2)}_{\text{Im}(z_1 z_2)}
 \end{aligned}$$

Division komplexer Zahlen

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1+2i}{1-i} \quad | \text{erweitern mit } (1+i)^* \text{ nach Satz 5.11-2} \\
 &= \frac{(1+2i) \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)} \\
 &= \frac{1+2i^2+2i+i}{1^2 + (-1)^2} = \frac{1-2+3i}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{Re}(\frac{z_1}{z_2})} + \underbrace{\frac{3}{2}i}_{\text{Im}(\frac{z_1}{z_2})}
 \end{aligned}$$

Ü

$$a) i(3-2i) = i3 - 2i^2 = 3i - (-2) = \underline{\underline{2+3i}}$$

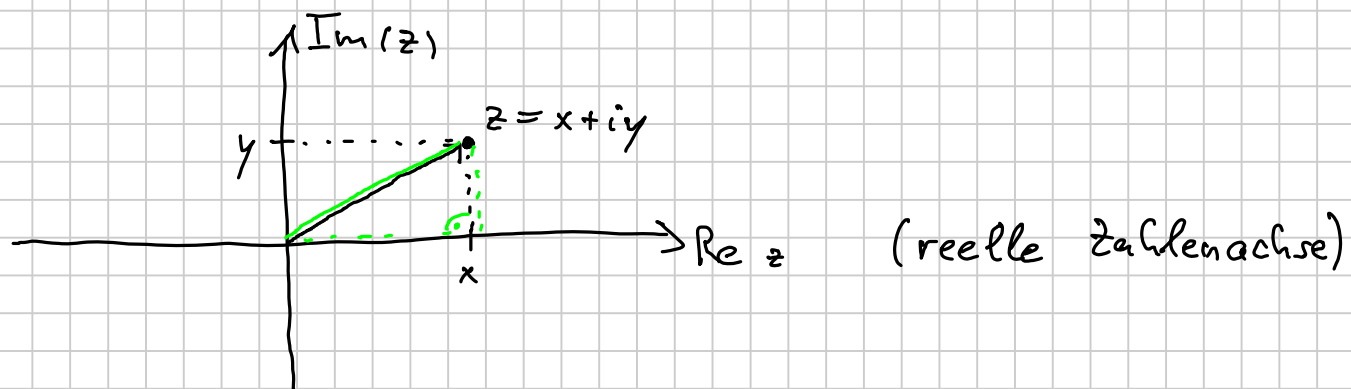
$$b) |\underline{3} - \underline{4i}| \stackrel{\text{Kurzform}}{\downarrow} = \sqrt{\underline{3}^2 + \underline{(-4)}^2} = \sqrt{9+16} = \underline{\underline{5}}$$

$$\text{Langform: } |z| = \sqrt{z \cdot z^*}$$

$$\begin{aligned}
 \text{hier: } |3-4i| &= \sqrt{(3-4i)(3+4i)} = \sqrt{3^2 - (4i)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \\
 &= \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \frac{3+4i}{2-i} &= \frac{(3+4i)(2+i)}{(\underline{2-i})(2+i)} = \frac{6+4i^2+8i+3i}{\underline{2^2} + \underline{(-1)^2}} \\
 &= \frac{6-4+11i}{4+1} = \frac{2+11i}{5} \\
 &= \underline{\underline{+\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i}}
 \end{aligned}$$

Gauß'sche Zahlenebene

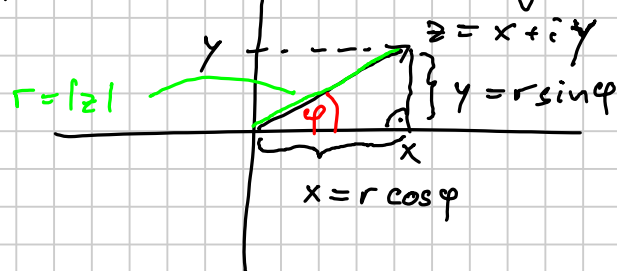


$$z = x + iy$$

z wird als Vektorpfeil in
Gauß'scher Zahlenebene (komplexe Ebene)
verstanden

(Analogie Vektor
 $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$)

Länge Vektor z ist Betrag von z : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
Alternative Beschreibung



über Trigonometrie
kann man x, y durch
 r und φ ausdrücken

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

Also kann man auch z alternativ darstellen

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$$

kartesische
Form

$$= r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

(trigonometr.
Form)

?

$$= r e^{i\varphi}$$

(Exponentialform)

Es gilt die Eulersche Formel

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi}$$

Erklärung (Beweis) über Taylor-Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Setze $x = i\varphi$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{(i\varphi)}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} + \dots$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

$$i \sin \varphi = i \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \right)$$

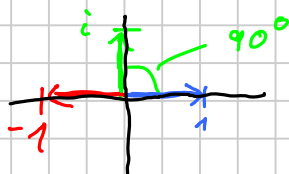
Deshalb

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi}$$

q.e.d.

Übung

φ	Grad
0	0°
$\frac{\pi}{2}$	90°
π	180°
2π	360°



$$z = e^{i \cdot 0} = 1$$

$$z = e^{i \cdot \pi/2} = i$$

$$z = e^{i \cdot \pi} = -1$$

$$z = e^{i \cdot 2\pi} = 1$$

z	$\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$
$e^{i \cdot 0}$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
$e^{i \cdot \pi}$	1	0
$e^{i \cdot \pi}$	-1	0
$e^{i \cdot \pi/2}$	0	1
$e^{i \cdot 2\pi}$	1	0

