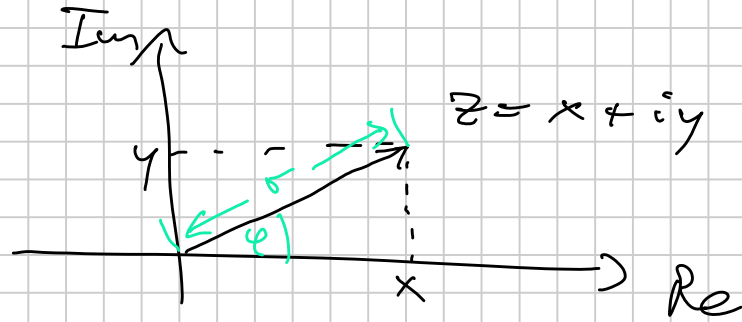


V MA2 - 28.05.2018

Komplexe Zahlen



Alternative Darstellungsformen

x, y	$\Rightarrow$	r, φ
kartesisch		trigon.
		Exponential

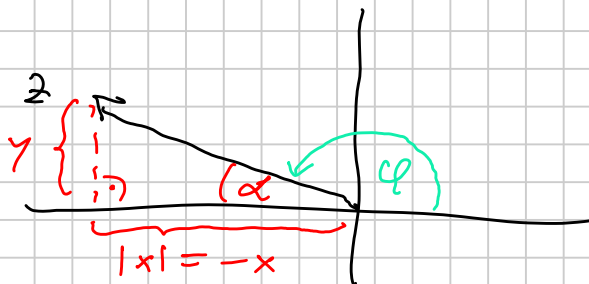
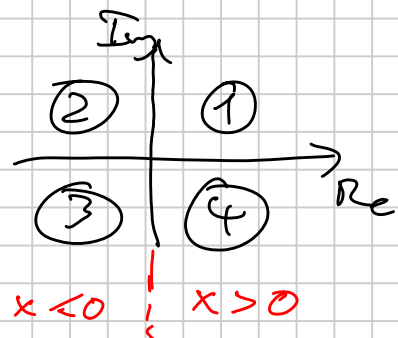
Wichtige Formel: Eulersche Formel

$$\boxed{e^{i\varphi} = \underbrace{\cos \varphi}_{\text{Re}} + i \underbrace{\sin \varphi}_{\text{Im}}}$$

Zu Ann. 3: Wieso ist $|e^{i\varphi}| = 1$?
 $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$

Zu Ann. 5:

Wieso "+ π ". Nehmen wir
ein z aus dem 2. Quadranten



$$\alpha + \varphi = \underbrace{180^\circ}_{\pi} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{|x|} = \frac{y}{-x}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{-x}\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\varphi \stackrel{(1)}{=} \pi - \alpha$$

$$= \pi - (-\arctan(\frac{y}{x}))$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi}}$$

Beispiel:

$$z = \underbrace{-2}_x + \underbrace{2\sqrt{3}}_y i$$

Was ist r und φ ?

$$\text{Lsg: } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 + 12} = \underline{\underline{4}}$$

Welcher Quadrant? 2. Quadrant

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi \hat{=} 120^\circ$$

Übung

$$z = 1.5 - 1.5\sqrt{3}i$$

Was ist r und φ ?

$$\text{Lsg: } r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cdot 3} = \sqrt{\frac{9+27}{4}}$$

$$= \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$$

z liegt im 4. Quadrant ($x > 0, y < 0$)

$$\Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}\right) = \arctan(-\sqrt{3})$$

$$= -\frac{\pi}{3} \hat{=} -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{-\pi + 6\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{3}}}$$

Potenzen komplexer Zahlen

$$z^3 = 1$$

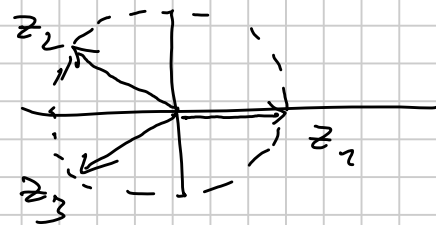
$$| ()^{\frac{1}{3}}$$

überlege graphisch
 $z = r e^{i\varphi}$

Für welche Winkel φ gilt $z^3 = 1$,
 daß $3 \cdot \varphi = 0$ (oder 2π , oder 4π , ...)

in Grad: $3\varphi = 0^\circ, 360^\circ, 720^\circ, \dots$

φ	3φ
0°	0°
120°	360°
240°	720°



Mögl. Winkel sind $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$

Wie ist es bei $z^4 = 1$?

Welche Winkel φ erfüllen $4\varphi = 0^\circ, 360^\circ, \dots$

	φ	4φ
$0 \equiv$	0°	0°
$\frac{\pi}{2} \equiv$	90°	360°
$\pi \equiv$	180°	$2 \cdot 360^\circ$
$\frac{3}{2}\pi \equiv$	270°	$3 \cdot 360^\circ$



(ii)

Welche Lösungen hat $z = (1+i)^{\frac{3}{4}}$

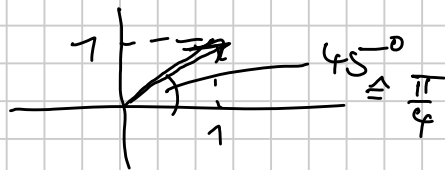
Hinweis: 1. Schritt $(1+i)$ in Exp.-darstellung

$$y = 1+i \quad r = \sqrt{\operatorname{Re}(y)^2 + \operatorname{Im}^2(y)} \\ = \sqrt{1^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

y liegt im 1. Quadranten

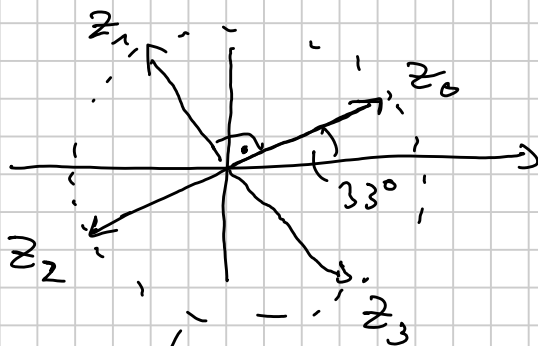
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(y)}{\operatorname{Re}(y)}\right) = \arctan 1$$

$$\Rightarrow \varphi = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$



$$z = (1+i)^{\frac{3}{4}} = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^{\frac{3}{4}} \\ = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)} \\ = \underline{\underline{2^{\frac{3}{8}}}} e^{i\frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$



$$\frac{3\pi}{16} \approx 33^\circ$$

Radius $2^{\frac{3}{8}}$