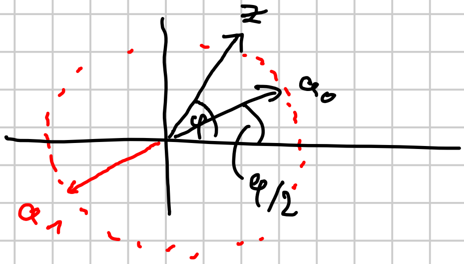
V MA2 - 30.05.2018

V+Ü: ab Mo Frau Schmitter

Sprechstunde 30.05. erst ab 13:30 - 14:15

Potenzen komplexer Zahlen



$a = z^{\frac{1}{2}}$ $\qquad z = re^{i\varphi}$

$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}$ das ist eine Lösung

bei $()^{\frac{1}{n}}$ gibt es n Lösungen

d.h. $z^{\frac{1}{2}}$ hat zwei Lösungen a_0, a_1

Übung Überlegen Sie rein graphisch:

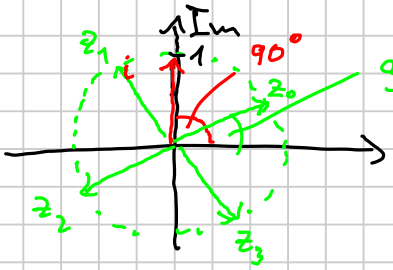
Welche Lösungen hat $z^4 = i$

$\Leftrightarrow z = i^{\frac{1}{4}}$

Lösung: 1) Wo liegt die Zahl i

2) Welche Lösungen hat $i^{\frac{1}{4}}$

1)
2)



$\frac{90°}{4} = 22.5°$

$z_0 = 1e^{i\,22.5°} = e^{i\pi/8}$

$z_1 = e^{i(22.5° + 90°)}$

$z_2 = e^{i(22.5° + 180°)}$

$z_3 = e^{i(22.5° + 270°)}$

Satz von Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eulersche Formel}}}{=} (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eulersche Formel}}}{=} \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Ü Additionstheoreme für $\cos(2\varphi)$ und $\sin(2\varphi)$

Satz von Moiver rückwärts:

$$\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi) \overset{\text{Moivre}}{=} (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2$$
$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2 + i\, 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Beide Zahlen sind gleich wenn Real- u. Imag. teil gleich

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(2\varphi) &= (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2 \\ \sin(2\varphi) &= 2\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}}$$

Ü quadr. Polynom

Quadr. Ergänzung

$$z^2 + az + b$$
$$= z^2 + az + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$
$$= \left(z + \left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$

Übung Welche $z_{1,2}$ lösen Polynom

$$z^2 - (4-2i)z + (5-4i) = 0$$

Lsg. über quadr. Ergänzung

$$z^2 - (4-2i)z + \underbrace{\left(\frac{4-2i}{2}\right)^2}_{(2-i)} - \left(\frac{4-2i}{2}\right)^2 + (5-4i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z-(2-i))^2 - (2-i)^2 + 5 - 4i = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (z-(2-i))^2 - (4 - \cancel{2i} - \cancel{2i} + i^2) + 5 - \cancel{4i} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (z-(2-i))^2 - 4 - i^2 + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (z-(2-i))^2 + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (z-(2-i))^2 = -2 \quad \Big|\, (\,)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad z-(2-i) = (-2)^{\frac{1}{2}}$$
$$z-(2-i) = \pm i\sqrt{2}$$
$$z_{1,2} = (2-i) \pm i\sqrt{2}$$
$$= \underline{\underline{2 + (-1 \pm \sqrt{2})\,i}}$$