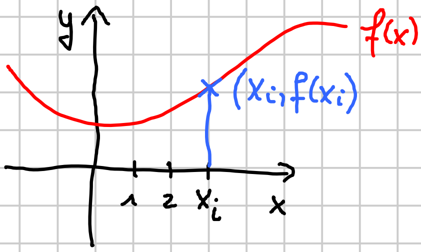
Vorlesung Mathe 2 6.6.18

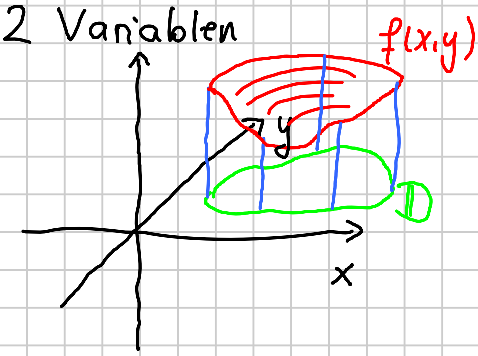
Mehrdimensionale Analysis

1 Variable



$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

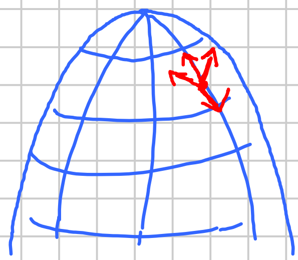
2 Variablen



n Variablen

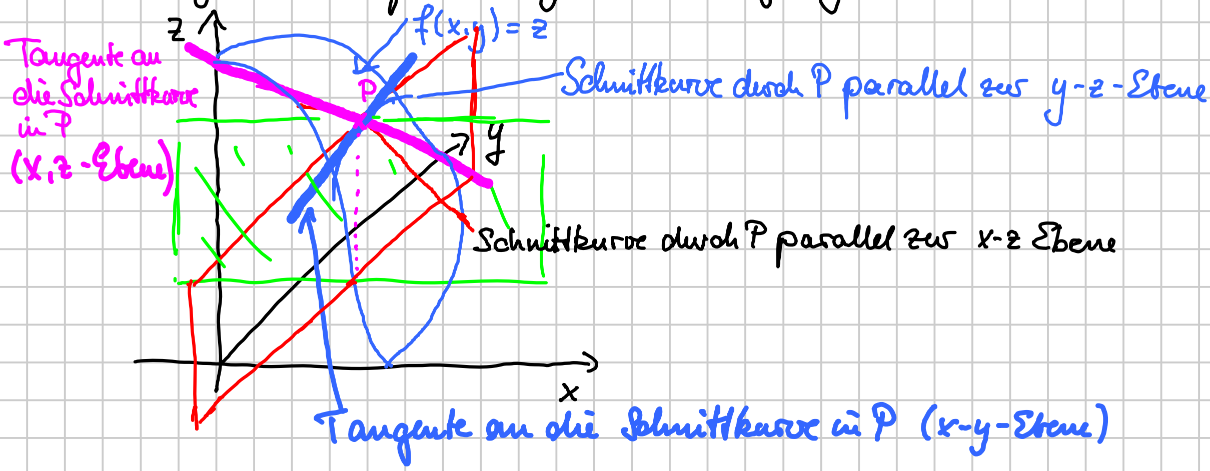
Anschauliche Darstellung nicht mehr möglich

Steigung



Steigung benötigt als Zusatzinformation die Richtung!

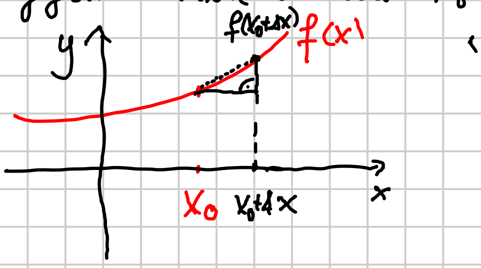
Man einigt sich auf die Angabe der Steigung in den Achsenrichtungen!



Ableitung 1. Ordnung für Fkt. mit einer unabhängigen Variable in einem Pkt. x_0

$$y = f(x)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



geg: $z = f(x,y)$ Fkt. mit 2 unabh. Variablen

Def: Partielle Ableitung 1. Ordnung nach der Variablen x

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Andere Schreibweise $f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}$

Steigung der Schnittkurve in x-Achsenrichtung (y ist in diesem Fall konstant)

Partielle Ableitung 1. Ordnung nach der Variablen y

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Andere Schreibweise $f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$

Def: $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ Fkt. mit n unabh. Variablen

n partielle Ableitungen 1. Ordnung $(i = 1, \ldots, n)$

$$f_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Def: (Gradient) Alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer Fkt. mit n unabh. Variablen werden zu einem Vektor zusammengefasst:

$x = (x_1, \ldots x_n)$

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(f_{x_1} \; f_{x_2} \; \ldots \; f_{x_n} \right) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

Bp: 1) $z = f(x,y) = e^{x \cdot y}$

$$f_x(x,y) = y \cdot e^{x \cdot y} \qquad f_y(x,y) = x \cdot e^{x \cdot y}$$

Bem: $f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$

$f(x) = e^{2x} \quad f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

hier: $f(x,y) = e^{x \boxed{y}}$ wie eine Konstante z.B. wie die 2 (s.o)

$f_x(x,y) = y \cdot e^{x \cdot y}$

2) $z = f(x,y) = x \cdot \ln y$

$f_x(x,y) = \ln y \qquad f_y(x,y) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

Bem: $\ln y$ ist hier wie eine Konstante

z.B. wie $z = x \cdot 5 = 5x$

$z' = 5$

3) $z = f(x,y) = x^n \cdot y^m$

$f_x(x,y) = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m \qquad f_y(x,y) = x^n \cdot m \cdot y^{m-1}$

4) $z = f(x,y) = x^n + y^m$

$f_x(x,y) = n \cdot x^{n-1} \qquad f_y(x,y) = m \cdot y^{m-1}$

5) $z = f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$

$f_x(x,y) = \cos x \cdot \cos y \qquad f_y(x,y) = \sin x \cdot (-\sin y) = -\sin x \cdot \sin y$

Achtung: Die Variable, nach der nicht abgeleitet wird, ist im Moment der Ableitung eine Konstante, danach aber wieder eine Variable! Die beiden ersten Ableitungen nach x und nach y sind wieder Funktionen mit zwei unabh. Variablen.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

$f_x(x,y)$ → $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$

$f_y(x,y)$ → $f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$

$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$: gemischte Ableitungen

$f_{xx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$: direkte Ableitungen

Bei einer Fkt. mit 2 unabh. Variablen gibt es 4 partielle Ableitungen 2. Ordnung

Bei einer Fkt. mit 3 unabh. Variablen gibt es 9 partielle Ableitungen 2. Ordnung

Bei einer Fkt mit n unabh. Variablen gibt es n^2 partielle Ableitungen 2. Ordnung

Partielle Ableitungen höherer Ordnung (>2):

Schreibweise: f_{xyz} : erst nach x, dann nach y, dann nach z
"von links nach rechts"

$\boxed{\text{Satz von Schwarz:}}$ die gemischten partiellen Ableitungen m-ter Ordnung einer Fkt. mit n unabh. Variablen (Fkt. m-mal stetig diffb.) sind gleich!

Bp: $z = f(x,y) = 2x\cdot y - 3x^2 + \frac{1}{y}$

Bestimmen Sie den Gradienten im Punkt P mit $x=2$ und $y=1$

$$f_x(x,y) = 2y - 6x$$
$$f_y(x,y) = 2x - \frac{1}{y^2}$$

$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} 2y - 6x \\ 2x - \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{grad} f(2,1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 6\cdot 2 \\ 2\cdot 2 - \frac{1}{1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hinweis auf Bedeutung des Gradienten!