Vorlesung Mathe 2 11.6.18

Darstellung der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

geg.: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Fkt. mit n unabh. Variablen

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix
Jacobi-Matrix
Funktionalmatrix

Noch ein paar Beispiele (hier können die part. Ableitungen auch mal kompliziert sein)

1)

$$z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2xy} + 3x$$

Gesucht: Werte der partiellen Ableitungen für
a) $x=0$ und $y=2$
b) $x=1$ und $y=-6$

Partielle Abl. nach x und nach y bestimmen

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x - 2y\cdot e^{2xy} + 3$$

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - 2y\cdot e^{2xy} + 3$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x\cdot e^{2xy}$$

$$f_x(0,2) = 0 - 4 + 3 = -1$$

$$f_y(0,2) = \frac{4}{4} - 0 = 1$$

$$\text{grad}_f(0,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_x(1,-6) = \frac{2}{1+36} + 12\cdot e^{2\cdot 1\cdot(-6)} + 3 = \frac{2}{37} + 12\cdot e^{-12} + 3$$

$$f_y(1,-6) = \frac{-12}{1+36} - 2\cdot e^{2\cdot 1(-6)} = -\frac{12}{37} - 2\cdot e^{-12}$$

2) $u = u(x,y,z) = 2x\cdot e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u_x(x,y,z) = 2\cdot e^{yz} + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$$

$$= 2\cdot e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_y(x,y,z) = 2xz\cdot e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_z(x,y,z) = 2xy\cdot e^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Anwenden von Ableitungsregeln

Bp: 1) $f(x,y) = y \cdot e^{x^2+y^2}$

$$f_x(x,y) = y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2xy \cdot e^{x^2+y^2}$$

Kettenregel mit innerer Ableitung $2x$

$$f_y(x,y) = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$= e^{x^2+y^2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2}$$

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ Produktregel

mit $u = y \qquad u' = 1$

$v = e^{x^2+y^2} \qquad v' = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$

Kettenregel

2) $$f(x,y) = \frac{e^x \cdot \sin y}{e^y \cdot \cos x}$$ $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f_x(x,y) = \frac{e^x \cdot \sin y \cdot e^y \cdot \cos x \overset{-\,-}{+} e^x \cdot \sin y \cdot e^y \cdot \sin x}{(e^y \cdot \cos x)^2}$$

$u = e^x \cdot \sin y$

$u_x = e^x \cdot \sin y$

$v = e^y \cdot \cos x$

$v_x = e^y \cdot -\sin x$

$$f_y(x,y) = \frac{e^x \cdot \cos y \cdot e^y \cdot \cos x - e^x \sin y \cdot e^y \cdot \cos x}{(e^y \cdot \cos x)^2}$$

$u = e^x \cdot \sin y$

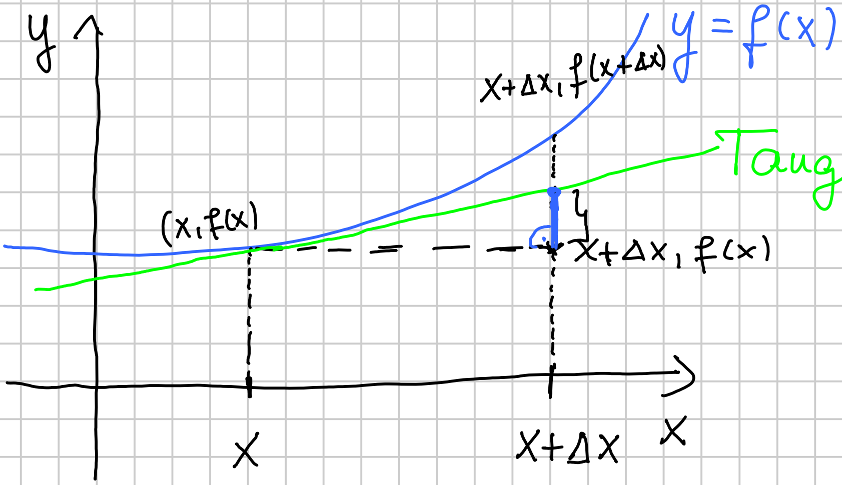
$u_y = e^x \cdot \cos y$

$v = e^y \cdot \cos x$

$v_y = e^y \cdot \cos x$

Partielles und totales Differenzial

Differential (Wdh. aus WS)



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Zugehörige Funktionswert auf der Tangente:

$$f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$f'(x) \cdot \Delta x$ ergibt sich aus der Def. der Steigung

$f(x+\Delta x)$ und $f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ sind für $\Delta x \to 0$ "ungefähr" gleich

$$\boxed{f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x}$$

Ersatz von f durch eine lineare Funktion (Tangente)

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) - f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

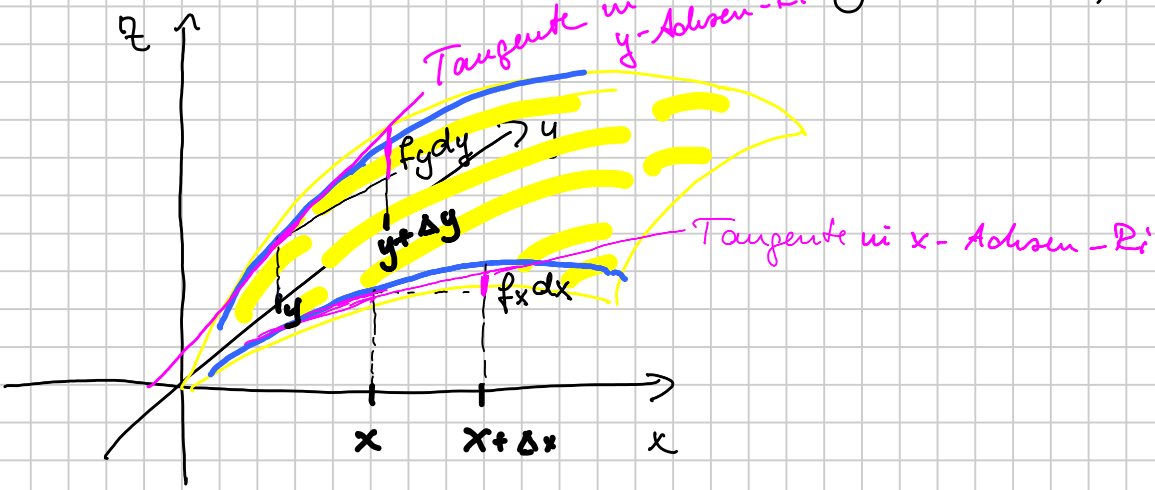
$$= f'(x) \cdot \Delta x$$

$$df = f'(x) \cdot dx$$ Differential der Funktion $y = f(x)$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$ Differentialquotient

Das Differential der Fkt. $y = f(x)$

wird nun betrachtet für $z = f(x,y)$ (3D)



2 D $\longrightarrow$ 3 D

Differential 2 mal Differential in x-Achsen-
in y-Achsen- } richtung

2 partielle Differentiale

Übertragbar auf $f: D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $y = f(x_1, \dots, x_n)$

Die partiellen Differentiale lauten:

$$d_{x_i} f = f_{x_i} \, dx_i$$

Das führt auf den Begriff des totalen Differentials

am Mi