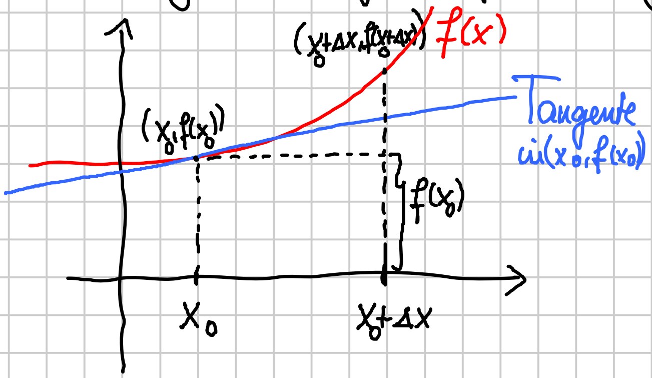
Vorlesung Mathe 2 13.6.18

Bestimmung der Tangentengleichung



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

Gleichung der Tangente:

Geradengleichung: $y = mx + b$

Zu bestimmen:

m Steigung

b Achsenabschnitt

$$y' = m = f'(x_0)$$

Steigung der Tangente

$$y_0 = mx_0 + b = f'(x) \cdot x_0 + b \Rightarrow b = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$y = \underbrace{f'(x_0)}_{m} \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

Umformen: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Tangentengleichung in $(x_0, f(x_0))$

Herleitung der Gleichung der Tangentialebene

Allgemeine Gleichung einer Ebene: $z = ax + by + c$

Zu bestimmen: a, b, c

Die partiellen Abl. 1. Ordnung stimmen im Berührpunkt überein!

$$z_x = f_x(x_0, y_0) = a$$

$$z_y = f_x(x_0, y_0) = b$$

*

Der Berührpunkt $P(x_0, y_0, z_0)$ liegt auf der Fläche <u>und</u> auf der Tangentialebene:

$$z_0 = a x_0 + b y_0 + c \quad \Rightarrow \quad c = z_0 - a x_0 - b y_0$$

Mit $*$: $\quad c = z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0$

Somit gilt:

$$z = \underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{a} \cdot x + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{b} \cdot y + \underbrace{z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0}_{c}$$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

Allgemeine Tangentialebenengleichung im Berührpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Fragestellung totales Differential:

Gegeben sei eine Fkt. mit zwei unabh. Variablen $z = f(x, y)$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ sei der Berührpunkt mit der Tangentialebene

Wie ändert sich die Höhenkoordinate z des Punktes P_0 bei einer Verschiebung des Punktes (x- und y-Koord. in der Def.ebene) auf der Fläche selbst (exakte Veränderung) bzw. auf der Tangentialebene (angenäherte Veränderung) ?

Nun: x_0 wird um Δx / dx, y_0 um Δy / dy verschoben (infinitesimal klein)

$$\underset{\Delta z}{z - z_0} = f_x(x_0, y_0)\,(\underbrace{x_0 + \Delta x - x_0}_{\Delta x = dx}) + f_y(x_0, y_0)\,(\underbrace{y_0 + \Delta y - y_0}_{\Delta y = dy})$$

$$\boxed{dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy}$$

Totale oder vollständige Differential für $z = f(x, y)$

Def: Das totale Differential für $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$
(n unabh. Variablen)

$$dz = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_i$$

$$= f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n$$

linearer Ausdruck

Bp: 1) Geg. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

Bestimmen Sie das totale Differential

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = \underbrace{\frac{2x}{x^2+y^2}}_{f_x(x_0,y_0)} dx + \underbrace{\frac{2y}{x^2+y^2}}_{f_y(x_0,y_0)} dy$$

Sei $P_0 = (2,1)$ und $dx = 0.5$ $dy = 0.75$

$$dz = \frac{4}{5} \cdot 0.5 + \frac{2}{5} \cdot 0.75 = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

Wahre Funktionswertänderung:

$$\Delta z = \left| f(2+0.5, 1+0.75) - f(2,1) \right| = \dots = 0.62$$

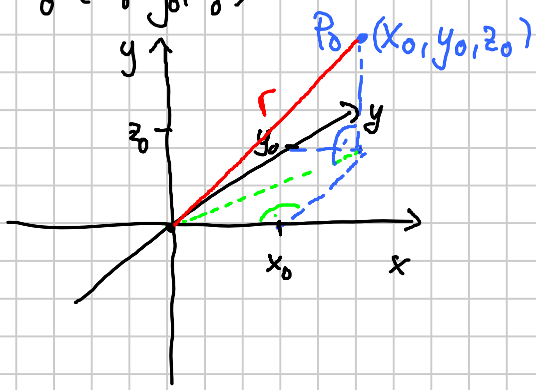
Anderer Fall: die x-Koord. werde von $2 \to 1$ verschoben

die y-Koord. werde von $1 \to 0.5$ verschoben

$dx = ?$ $dy = ?$

$dx = -1$ $dy = -0.5$

2) Geg. sei $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt im $\mathbb{R}^3$



$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Abstand des Punktes im $\mathbb{R}^3$ vom Ursprung

Wie ändert sich der Abstand näherungsweise, wenn $A(1,2,0)$ in den Punkt $B(0{,}9,\ 2{,}2,\ -0{,}1)$ verschoben wird?

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Formel totales Differential: $r_x\,dx + r_y\,dy + r_z\,dz = dr$

$dx = -0{,}1$

$dy = +0{,}2$

$dz = -0{,}1$

$$r_x = \frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad r_x(1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad r_y(1,2,0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad r_z(1,2,0) = \frac{0}{\sqrt{5}}$$

$$dr = r_x(1,2,0)\cdot(-0{,}1) + r_y(1,2,0)\cdot 0{,}2 + r_z(1,2,0)\,(-0{,}1)$$

$$dr = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-0.1) + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0{,}2 + 0\cdot(-0{,}1)$$

$$= \frac{-0{,}1+0{,}4}{\sqrt{5}} \approx 0{,}1342$$

Die wahre Änderung der Abstände beträgt:

$r(1,2,0) = \sqrt{5} = 2{,}2361$

$r(0{,}9;\ 2{,}2;\ -0{,}1) = \sqrt{5{,}66} = 2{,}3791$

Differenz: 0.1430

3) $z = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta}$

das totale Differential lautet:

$$dz = df = \alpha x_1^{\alpha-1}\cdot x_2^{\beta}\cdot dx_1 + x_1^{\alpha}\cdot\beta\cdot x_2^{\beta-1}\cdot dx_2$$

$$= \underbrace{x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta}}\left(\alpha\cdot\frac{1}{x_1}\,dx_1 + \beta\cdot\frac{1}{x_2}\cdot dx_2\right)$$

$$= f(x_1,x_2)\left(\frac{\alpha}{x_1}\,dx_1 + \frac{\beta}{x_2}\,dx_2\right)$$

4) (für die Nacharbeit)

$$f(x,y) = 4x^2 - 3xy^2 + x \cdot e^y$$

$x_0 = 1$ werde nach 0,9 verschoben

$y_0 = 0$ " " 0,2 verschoben

Berechnen Sie die angenäherte Änderung der Höhenkoordinate mit Hilfe des totalen Differentials!