Vorlesung Mathe 2

18.6.2018

Differentiation impliziter Funktionen im $\mathbb{R}^2$

(Fkt. mit 1 unabh. Variablen)

$y = f(x)$ explizit dargestellte Fkt. mit 1 unabh. Variablen

$F(x,y) = 0$ implizite Darstellung

"Implizit" Differenzieren mit Hilfe des totalen Differentials

Zusammenhang Analysis I (WS) $\leftrightarrow$ Analysis II (SS)

Ausgangspunkt $F(x,y) = 0$

auch aufzufassen als Schnittkurve einer Fkt. $z = F(x,y)$ mit der x,y-Ebene

$$dz = F_x\,dx + F_y\,dy \quad \text{totale Differential}$$

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

da $dx \neq 0$ $\Rightarrow$ $$F_x \cdot \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_x + F_y \cdot \boxed{\frac{dy}{dx}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_x + F_y \cdot y' = 0$$

nach y' auflösen : $\boxed{y' = -\frac{F_x}{F_y}}$

Bp: $z = f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 y + y^2 \cdot x + x^2 + y = 0$

Berechnen Sie die Steigung für $x = 1$

Zugehöriger y-Wert

$$f(1,y) = 1 + y^3 + y + y^2 + 1 + y = 0$$

$$y^3 + y^2 + 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(y^2+2)}_{\neq 0}\underbrace{(y+1)}_{\Downarrow} = 0$$

$= 0 \Leftrightarrow y = -1$

Gesucht: Steigung für $x = 1$, $y = -1$

$$f_x = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x$$

$$f_y = 3y^2 + x^2 + 2xy + 1$$

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy + y^2 + 2x}{3y^2 + x^2 + 2xy + 1} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Steigung im Punkt $(x = 1, y = -1)$:

$$y' = -\frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1)^2 + 2 \cdot 1}{3 \cdot (-1)^2 + 1^2 + 2 \cdot 1(-1) + 1}$$

$$= -\frac{4}{3}$$

Hinweis: Differentiation von Funktionen in der Parameterdarstellung

$x(t)\,,\ y(t)$

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

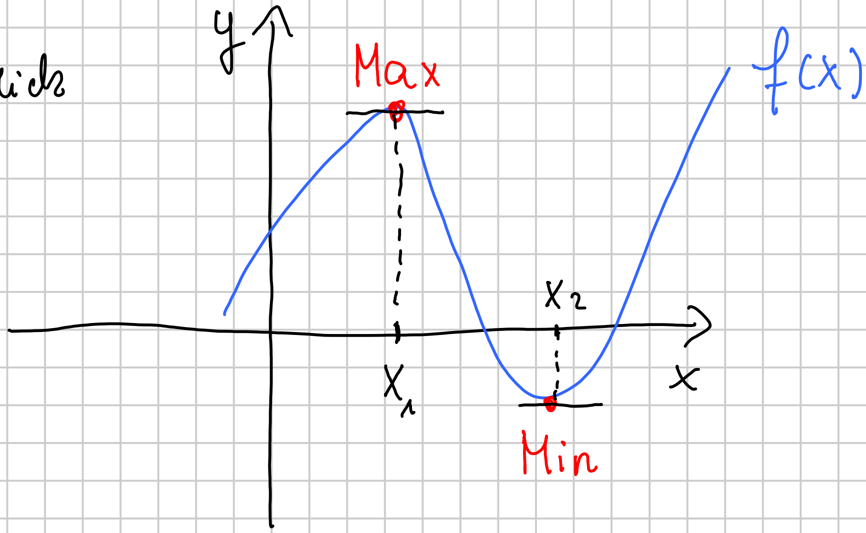
$$\frac{dz}{dt} = f_x\,dx \cdot \frac{dx}{dt} + f_y\,dy \cdot \frac{dy}{dt}$$

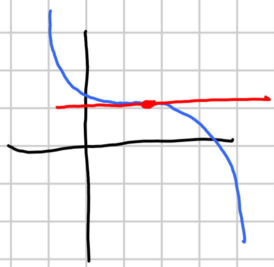
innere Ableitung

"Kettenregel"

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabh. Variablen

Rückblick





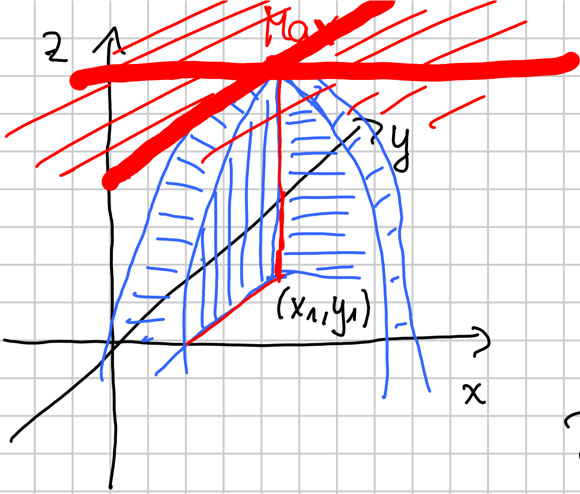
notwendige Bed.: $f'(x) = 0$ liefert Kandidaten

hinreichende Bed.: $f''(x) > 0$ Minimum

$f''(x) < 0$ Maximum

$f''(x) = 0$ Sattelpunkt

Nun: $z = f(x,y)$ Funktion mit 2 unabh. Variablen



Notwendige Bed.

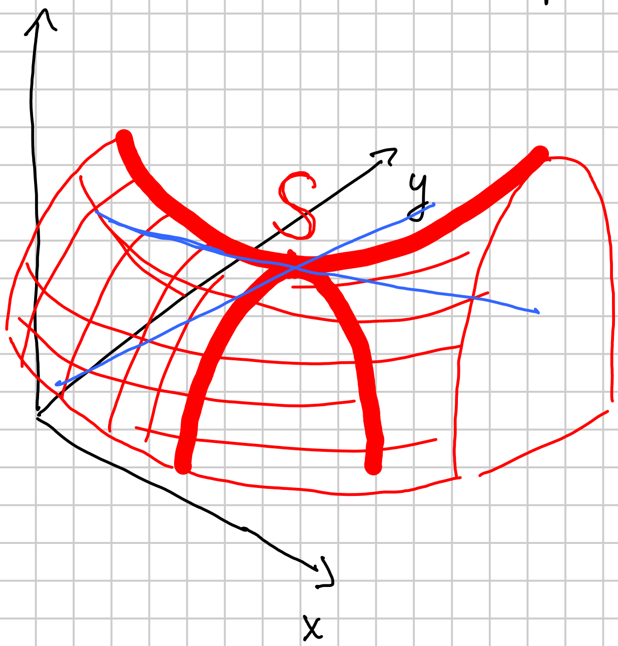
$$f_x(x_1,y_1) = 0$$

$$f_y(x_1,y_1) = 0$$

Die partiellen Ableitungen sind gleich Null
"verschwinden"

Die Schnittkurven haben im Max. waagrechte Tangenten

Aber auch hier "verschwinden" die partiellen Ableitungen



2 waagrechte Tangenten in S

1 Schnittkurve mit Minimum

1 Schnittkurve mit Maximum

Sattelpunkt

Notwendige Bedingungen : $f_x(x,y)=0$ $f_y(x,y) = 0$

Hinreichende Bedingungen für Minimum bzw. Maximum für $z = f(x,y)$ im Punkt (x_0,y_0,z_0)

Für die partiellen Abl. 2. Ordnung gilt

$$\Delta = f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Δ ist die Determinante der Hesse-Matrix

Falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ Maximum

$f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ Minimum

Falls $\Delta < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Aufgabe: $z = f(x,y) = x^3 - 12xy + 6y^2$
Bestimmen Sie die Extremwerte und weisen Sie nach, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

$$\text{I} \quad f_x(x,y) = 3x^2 - 12y = 0$$

$$\text{II} \quad f_y(x,y) = -12x + 12y = 0$$

Aus II: $12y = 12x \Leftrightarrow x = y$

$x = y$ in I: $3x^2 - 12x = 0$

$$x(3x - 12) = 0$$

Entweder $x = 0$ oder $3x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x = 12$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

2 Kandidaten: $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ bzw. $x_2 = 4$ und $y_2 = 4$

Für die hinreichende Bedingung:

$$f_{xx}(x,y) = 6x$$

$$f_{yy}(x,y) = 12$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -12$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$\Delta = 0 - 144 = -144 < 0$

Sattelpunkt bei $(0,0)$

$$H(4,4) = \begin{pmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$\Delta = 288 - 144 = 144 > 0$

Extremwert bei $(4,4)$

$f_{xx}(4,4) = 6 \cdot 4 = 24 > 0$

Minimum bei $(4,4)$

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Fkt. mit n unabhängigen Variablen

$z = f(x_1, \dots x_n)$ $\quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$

sei der Kandidat

1) notwendige Bedingungen:

$$\operatorname{grad} f(\bar{x}) = 0$$

Alle partielle Ableitungen werden gleich Null

$f_{x_i}(\bar{x}) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$

2) Hinreichende Bedingungen

$$H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } H_i = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_1x_i}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_ix_1}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_ix_i}(\bar{x}) \end{vmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

Hauptunterdeterminante

$\bar{x}$ lokales Maximum $\Leftrightarrow$ $H_1 < 0$ $H_2 > 0$ $H_3 < 0, \dots$

$$H_n \begin{cases} < 0 & n \text{ ungerade} \\ > 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\bar{x}$ lokales Minimum $\Leftrightarrow$ $H_1 > 0$ $H_2 > 0$, $H_3 > 0 \dots$

$H_n > 0$ $i = 1, \dots n$

Bp.: $z = f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_1 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$