Vorlesung Mathematik 20.6.18

Wdh: Hinreichende Bedingungen

$n=2$ (2 unabh. Variablen) $\Delta = |H(x)| > 0$

$f_{xx} < 0 \Rightarrow$ Max

$f_{xx} > 0 \Rightarrow$ Min

Bp:

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$$

Notwendige Bedingungen: grad $f = 0$ $\quad (u \cdot v)' = u'v + uv'$

$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1^2 - 3)\, e^{x_1^3 - 3x_1} = 0$ I $\quad f_{x_1x_1} = 6x_1 \cdot e^{x_1^3-3x_1} + (3x_1^2-3) \cdot (3x_1^2-3) \cdot e^{x_1^3-3x_1}$

$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_2 + x_3 = 0$ II

$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 2x_3 + 3 = 0$ III

Aus I: $3x_1^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_1 = -1$

Aus II und III: $-2x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow 2x_2 = x_3$ $*$

$x_2 - 2x_3 + 3 = 0$

$*$ in III: $x_2 - 2 \cdot 2x_2 + 3 = 0 \Leftrightarrow -3x_2 + 3 = 0 \Leftrightarrow -3x_2 = -3$
$\Rightarrow x_2 = 1$

mit $*$: $2 \cdot 1 = x_3 \Rightarrow x_3 = 2$

Kandidaten: $x_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \qquad x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$

für die hinreichenden Bedingungen müssen die part. Abl. 2. Ord berechnet werden:

$f_{x_1x_1}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} + (3x_1^2 - 3)^2 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1}$ $\quad f_{x_1x_2} = 0 \quad f_{x_1x_3} = 0$

$f_{x_2x_1} = 0$ $\quad f_{x_2x_2} = -2 \quad f_{x_2x_3} = 1$

$f_{x_3x_1} = 0$ $\quad f_{x_3x_2} = 1 \quad f_{x_3x_3} = -2$

$$H_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6e^{-2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix}6e^{-2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach 1. Spalte}}}{=} 6\cdot e^{-2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 6e^{-2}(4-1)$$

$$= 18e^{-2} > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix}6e^{-2} & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} = -12e^{-2} < 0$$

$$H_1 = |6e^{-2}| = 6e^{-2} > 0 \qquad H_1 > 0 \quad \boxed{H_2 < 0} \quad H_3 > 0$$

für $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ kann keine Aussage getroffen werden

nun: Kandidat 2

$$H_3\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix}-6e^{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix} \underset{\text{Entw. nach 1. Zeile}}{=} -6e^{2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -6e^{2}\cdot 3$$

$$= -18e^{2} < 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix}-6e^{2} & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} = 12e^{2} > 0$$

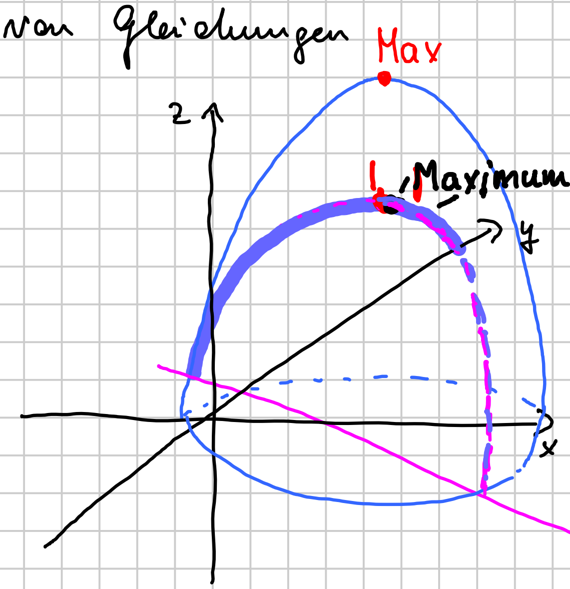
$$H_1 = |-6e^{2}| = -6e^{2} < 0$$

$$H_1 < 0 \qquad H_2 > 0 \qquad H_3 < 0$$

damit ex. an der Stelle $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ein lokales Maximum

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Für die Variablen gelten noch zusätzliche Einschränkungen in Form von Gleichungen



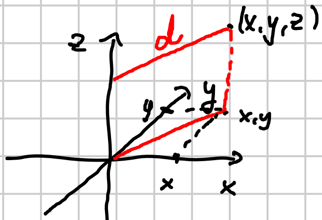
Es wird nun das Maximum von den Funktionswerten berechnet, die zum eingeschränkten Def. bereich gehören.

Konkretes Beispiel:

verbal

Ein Punkt bewege sich im Raum auf der Ebene mit der Gleichung $x+y+z=0$, der Abstand des Punktes vom Ursprung sei 1

Frage: Welches ist der kleinst- und welches der größtmögliche Abstand von der z-Achse?



$d=\sqrt{x^2+y^2}$

mathemat.

Zielfunktion: $d=f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$

Nebenbedingungen: N1: $x+y+z=0$

N2: $x^2+y^2+z^2=1$

Zielfunktion und zwei Nebenbedingungen

2 Lösungswege

1) Lösung durch Variablensubstitution (2 unabh. Variablen und eine Nebenbedingung)

$z = f(x,y)$ Zielfunktion

$g(x,y) = 0$ Nebenbedingung

Bp: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4$ $\quad D = \mathbb{R}_+^2$

Nebenbedingung: $g(x,y) = 2 - 2x - y = 0 \iff y = -2x+2$ $\ast$

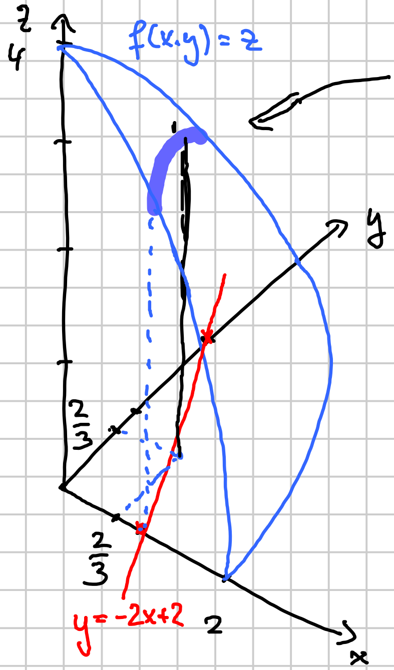
$\ast$ in $f(x,y)$: $-x^2 - \frac{1}{2}(-2x+2)^2 + 4 = z$

$$\iff z = -x^2 - \frac{1}{2}(4x^2 - 8x + 4) + 4$$
$$= -x^2 - 2x^2 + 4x - 2 + 4$$
$$z = -3x^2 + 4x + 2$$

Für Extr.wertber.: $z' = -6x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$z'' = -6$

mit $\ast$: $y = -2 \cdot \frac{2}{3} + 2 = -\frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$



Max bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$

Variablensubstitution bekannt aus dem WS

Bp: Dosenaufgabe: Volumen fest vorgegeben

Oberfläche soll minimiert werden!

Nun: mehr als zwei unabhängige Variablen und mehr als eine Nebenbedingung

Lagrange - Methode

Lagrange (1736 - 1813)

Einstieg : $z = f(x,y)$ NB $g(x,y) = 0$

Die Extremwerte der Fkt z unter der NB $g(x,y) = 0$ liegen an den Stellen, an denen die Fkt. $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$ ihre Extremwerte annimmt

λ heißt der Lagrange-Multiplikator