Vorlesung Mathematik
25. 6. 2018

Extremwerte unter Nebenbedingungen

Fkt. mit 2 unabh. Variablen und einer Nebenbed., die nach einer der beiden Variablen aufzulösen ist:

Variablensubstitution

Fkt. mit mehr als zwei Variablen und mehr als einer Nebenbedingung:

Lagrange-Methode

zunächst: 2 unabh. Variablen 1 Nebenbedingung

$z = f(x,y)$ Nebenbed.: $g(x,y) = 0$

(implizite Darstellung)

$$L(x,y,\lambda) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{Zielfunktion}} + \lambda \cdot \underbrace{g(x,y)}_{\text{Nebenbedingung}}$$

λ Lagrange-Multiplikator

Bem: 1) Funktionswerte an einer Extremstelle sind für L und f gleich, da $g(x,y) = 0$

2) Durch diese Methode wird das Problem

Extremwertbest. u. NB zurückgeführt auf die globale Extremwertbestimmung mit allerdings einer Variablen pro NB mehr!

3) $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$

notw. Bed. $L_x = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0$

$L_y = f_y(x,y) + \lambda \cdot g_y(x,y) = 0$

$L_\lambda = g(x,y) = 0$

Merke: Die partielle Ableitung nach λ liefert die Nebenbedingung

Bp. 1) $f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \qquad D = \mathbb{R}_+^2$

NB: $\underbrace{g(x,y) = 2 - 2x - y = 0 \qquad [\Rightarrow \text{gerade } y = -2x+2]}_{\text{implizite Form}}$

$$L(x,y,\lambda) = \underbrace{-x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{(2-2x-y)}_{+\lambda \cdot g(x,y)}$$

notwendige Bed:

$L_x(x,y,\lambda) = -2x - 2\lambda = 0 \qquad \text{I}$

$L_y(x,y,\lambda) = -y - \lambda = 0 \qquad \text{II}$

$L_\lambda(x,y,\lambda) = 2 - 2x - y = 0 \qquad \text{III}$

Aus I: $-2x = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -x$

Aus II: $-y = \lambda \Rightarrow \lambda = -y$

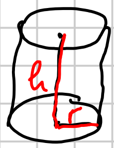
$\Rightarrow x = y \quad *$

$*$ in III: $2 - 2x - x = 0 \Leftrightarrow 3x = 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

$\underset{*}{\Rightarrow} y = \frac{2}{3}$

Kandidat liegt bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$



2) Dosenproblem

Produziert werden oben offene Dosen mit Radius r und Höhe h, $V = 1\,l$

Abmessungen für minimalen Materialverbrauch?

Zielfunktion: $f(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h$
(Oberfläche = Material)

Nebenbedingung: $V = 1\,l$

Merke: $1\,l = 1000\,cm^3 = 1\,dm^3$

$g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$

$g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$

Lagrangefunktion:

$$L(r,h,\lambda) = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h + \lambda(\pi \cdot r^2 \cdot h - 1000)$$

$$L_r(r,h,\lambda) = 2\pi r + 2\pi h + 2r \cdot \lambda \cdot h \cdot \pi = 0 \quad \text{I}$$

$$L_h(r,h,\lambda) = 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0 \quad \text{II}$$

$L_\lambda(r,h,\lambda) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 \qquad = 0 \qquad \underline{III}$

Aus $\underline{II}$: $2\pi r = -\lambda\pi r^2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{r}$ $*$

Aus $\underline{I}$: $2\pi r + h(2\pi + 2\lambda\pi r) = 0$

$\overset{\Rightarrow}{\text{mit } *}$: $2\pi r + h\left(2\pi + 2\cdot\left(-\frac{2}{r}\right)\cdot\pi\cdot r\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r + h\left(2\pi - \frac{4\pi\cdot r}{r}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r + h(2\pi - 4\pi) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r + h(-2\pi) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r = 2\pi h \Rightarrow r = h$ $**$

$**$ in $\underline{III}$: $\pi\cdot r^2\cdot r - 1000 = 0$

$\Leftrightarrow \pi\cdot r^3 - 1000 = 0$

$\Leftrightarrow \pi r^3 = 1000 \Rightarrow r^3 = \frac{1000}{\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = 6.828\,\text{cm}$

Die oben offene Dose hat die Abmessungen:

$r = h = 6.828\,\text{cm}$

$\left[\text{Nebenbem: } \lambda = -\frac{2}{r} = -0.2929\right]$

Die Methode von Lagrange bei Funktionen mit n unabh. Variablen und k Nebenbedingungen

$z = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$

$z_j = g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad j = 1, \ldots, k$

k Nebenbedingungen in der impliziten Form

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$

$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x)$

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, g_j(x_1,\dots,x_n)$$

hat $n+k$ unabhängige Variablen

Notwendige Bedingungen

$$L_{x_i} = 0 \qquad i = 1,\dots,n$$

$$L_{\lambda_j} = 0 \qquad j = 1,\dots,k$$ (genau die k Nebenbedingungen)

Das Gleichungssystem, das gelöst werden muss hat $n+k$ Unbekannte

Die Lösungen $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ sind die Kandidaten für Extremwerte.

Hinreichende Bedingung (für eine Fkt. mit n unabh. Variablen und 1 Nebenbed.)

$$z = f(x_1,\dots,x_n) \qquad g(x_1,\dots,x_n) = 0$$

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda) = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda\, g(x_1,\dots,x_n)$$

$x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ sei eine Lösung der notw. Bed.

x^* lokales Maximum, falls

$$G_2 > 0,\ G_3 < 0,\ \dots\ G_n \begin{cases} > 0 & n \text{ gerade} \\ < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

x^* lokales Minimum, falls

$$G_2 < 0,\ G_3 < 0,\ \dots\ G_n < 0$$

mit $G_2 = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \overset{L_{x_1\lambda}}{g_{x_1}} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \overset{L_{x_2\lambda}}{g_{x_2}} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & 0 \end{vmatrix}$ $\quad L_\lambda = g_{x_1}$

$L_{\lambda x_1} = L_{x_1\lambda}$

$\vdots$

$$G_n = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} & \overset{L_{x_1\lambda}}{g_{x_1}} \\ L_{x_2x_1} & - & - & - & g_{x_2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ L_{x_nx_1} & - & - & L_{x_nx_n} & g_{x_n} \\ g_{x_1} & - & - & g_{x_n} & \overset{L_{\lambda\lambda}}{0} \end{vmatrix}$$

Interpretation des Lagrange-Multiplikators:

Bedeutung von λ

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

Nach λ auflösen: $\lambda = \dfrac{L(x,y,\lambda) - f(x,y)}{g(x,y)}$

Interpr. mittels Differentialrechnung:

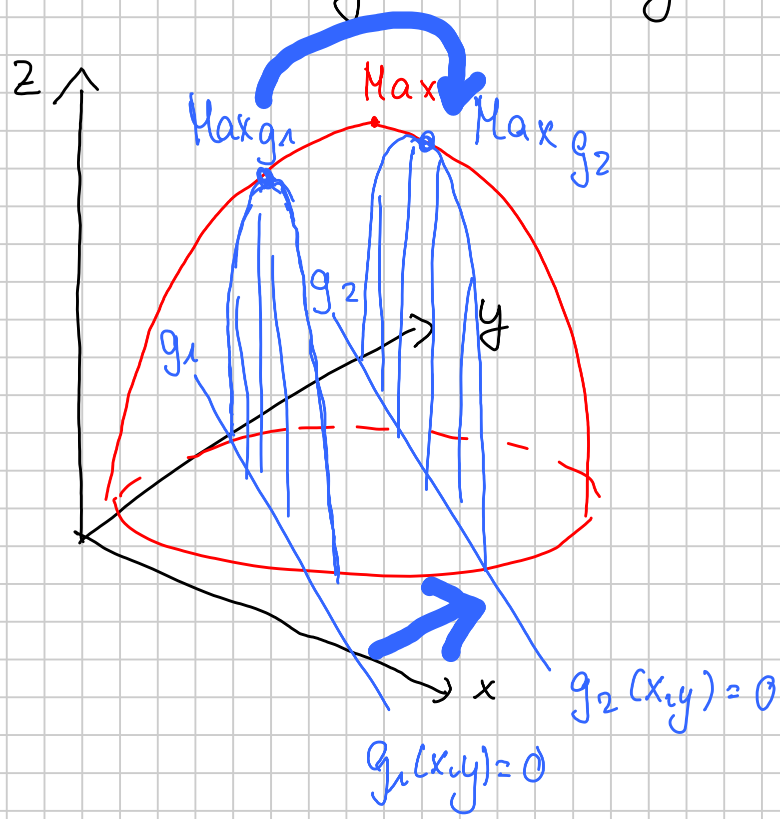
λ ist der Differentialquotient der Funktion $L(x,y,\lambda)$ nach der Nebenbedingung $g(x,y)$

λ ist die infinitesimale Änderungsrate der Funktion L bei Variation der Nebenbedingung g

λ ist die marginale Änderungsrate der Funktion f

zur Nebenbed. g

$\Rightarrow$ Marginalanalyse



λ gibt an, um wieviel sich der Zielfunktionswert ändert, wenn sich die Nebenbed. um eine Einheit ändert.

Bp: $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ (Abstand zur z-Achse)

$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$

$g_2(x,y,z) = x+y+z = 0$

2 Nebenbedingungen!

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{f(x,y,z)} + \lambda_1 \overbrace{(x^2+y^2+z^2-1)}^{g_1(x,y,z)} + \lambda_2 \overbrace{(x+y+z)}^{g_2(x,y,z)}$$

Notwendige Bedingungen:

$L_x = 0 \quad L_y = 0 \quad L_z = 0 \quad L_{\lambda_1} = 0 \quad L_{\lambda_2} = 0$

$$L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}} + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \qquad \text{I}$$

$$L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad \text{II}$$

$$L_z = 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \qquad \text{III}$$

$$L_{\lambda_1} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \qquad \text{IV}$$

$$L_{\lambda_2} = x+y+z = 0 \qquad \text{V}$$

I, II nach λ_2 auflösen und gleichsetzen
liefert $x=y$ oder $\lambda_2 = 0$

Kandidaten: P_1: $x_1 = \frac{1}{6}\sqrt{6}$, $y_1 = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ $z_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$

P_2: $x_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$, $y_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$, $z_2 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

P_3 : $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $z_3 = 0$

P_4 : $x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $z_4 = 0$

$$f(P_1) = \frac{1}{3}\sqrt{3} = f(P_2)$$

$$f(P_3) = f(P_4) = 1$$