Vorlesung Mathematik

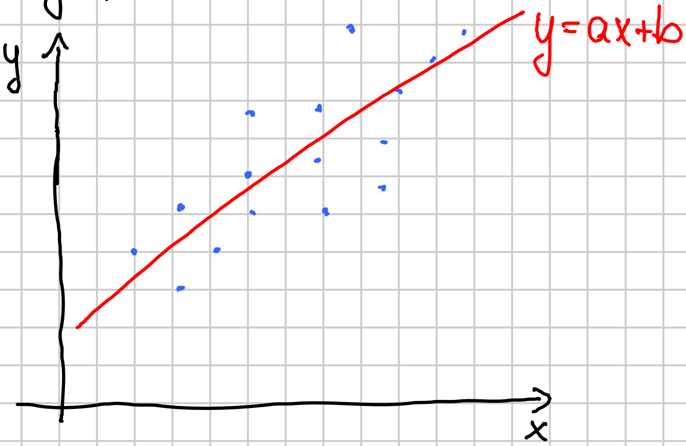
27.6.2018

Weitere Anwendung der mehrdimensionalen Analysis :
Ausgleichsrechnung

Ziel der Ausgl.rechng : Beurteilung von Meßwerten, Meßergebnissen, empirisch gewonnener Daten

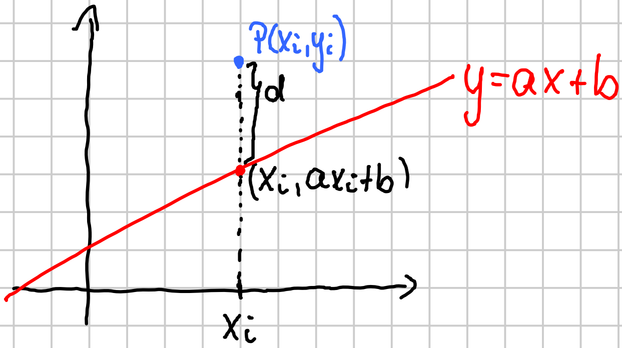
häufig : linearer Zusammenhang, durch eine Gerade zu beschreiben

Bp: Zwei Größen mit vermuteten linearen Zusammenhang



durch eine Gerade zu beschreiben

Die Methode der kleinsten Quadrate nach C.F. Gauß



d ist der Abstand von Geradenpunkt zum Meßpunkt

Der Abstand beträgt : $\left(y_i - (ax_i + b)\right)$

Abstandsquadrate, um Fehler nach oben und unten gleichermaßen zu berücksichtigen

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$$

Summe der Abstandsquadrate bei n Meßwerten

Funktion mit 2 unabh. Variablen a und b

Ziel: a und b so bestimmen, dass $Q(a,b)$ ein Minimum annimmt!

Extremwertbestimmung einer Fkt. mit 2 unabh. Variablen

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2y_i(ax_i+b) + (ax_i+b)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - 2y_i a x_i - 2y_i b + a^2 x_i^2 + 2ax_i b + b^2)$$

Notwendige Bedingungen:

$$Q_a(a,b) = 0 \qquad Q_b(a,b) = 0$$

$$Q_a(a,b) = \sum_{i=1}^{n} -2y_i x_i + 2ax_i^2 + 2x_i b = 2\sum_{i=1}^{n} -x_i y_i + ax_i^2 + bx_i = 0 \quad \mathrm{I}$$

$$Q_b(a,b) = \sum_{i=1}^{n} -2y_i + 2ax_i + 2b = 2\sum_{i=1}^{n} -y_i + ax_i + b = 0 \quad \mathrm{II}$$

Aus I:
$$-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} ax_i^2 + bx_i = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} ax_i^2 + bx_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (*)$$

Aus II:
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} ax_i + b$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} b$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + n\cdot b$$

Setze $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

arithmetischen Mittel der Meßwerte x_i und y_i

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum y_i = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i) + \frac{n}{n}b$$
$$\Leftrightarrow \bar{y} = a\cdot\bar{x} + b \quad \Leftrightarrow \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (**)$$

(**) in (*):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\bar{y} - a\bar{x})\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$$\boxed{b = \bar{y} - a\bar{x}}$$

a, b zunächst Kandidaten

Nachweis des Minimums erfolgt über $Q_{aa}(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$

$$Q_{bb}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n > 0$$

$$Q_{ab}(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Delta = Q_{aa}\cdot Q_{bb} - Q_{ab}^2 = \text{-----} = 4\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(x_i - x_j)^2}_{>0}\right]$$

geht eigentlich über 2 Seiten

$\Delta > 0 \Rightarrow$ Extremwert

$Q_{aa}(a,b) > 0 \Rightarrow$ Minimum

Bsp:

x	48	56	69	64	60	42	40	54	65	72	83	51
y	74	86	96	90	93	68	58	75	103	110	106	80

12 Wertepaare

Berechnen Sie "von Hand" die Gleichung der Regressionsgeraden!

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i y_i) - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

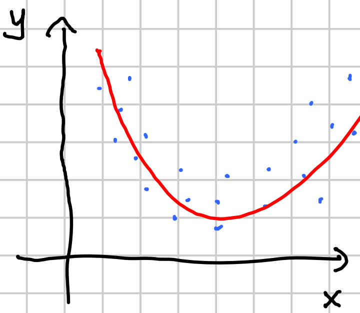
Rechnung: $48 \cdot 74 + 56 \cdot 86 + 69 \cdot 96 + \ldots + 51 \cdot 80 = \sum_{i=1}^{12} x_i y_i$

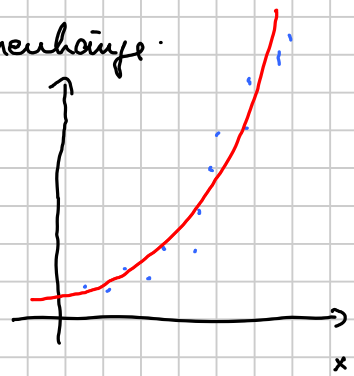
$$\bar{x} = \frac{48+56+\ldots 51}{12} \qquad \bar{y} = \frac{74+86+\ldots+80}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 48^2 + 56^2 + \ldots + 51^2$$

Ergebnis: $y = \underbrace{1{,}184}_{a}\, x + \underbrace{17{,}298}_{b}$

Andere als lineare Zusammenhänge:





Lösungsansätze:
$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$
$$y = ax^b \quad (2)$$
$$y = a \cdot e^{bx} \quad (3)$$

Bp: Ansatz für (1) (Zusammenhang vermutet: quadr. Fkt.)

$$Q(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a x_i^2 + b x_i + c) \right]^2$$

3 Variablen a, b, c

Ansatz für (2) (Zusammenhang vermutet: Potenzfunktion)

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - a x_i^b \right]^2$$

2 Variablen a, b

Ansatz für (3) (Zusammenhang vermutet: Exponentialfunktion)

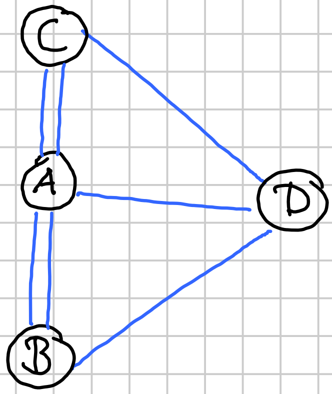
$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - a \cdot e^{b x_i} \right]^2$$

Die Einführung in die mehrdimensionale Analysis ist damit abgeschlossen!

Einführung in das nächste Thema:

Graphentheorie

Leonhard Euler in Königsberg



Frage nach einem Euler Weg !

Graph

A, B, C, D Knoten

Kanten