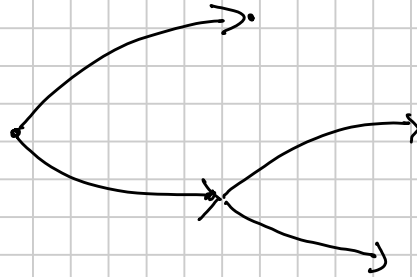


Vorlesung Mathematik 2.7.2018

Graphentheorie

Bekannte Graphen



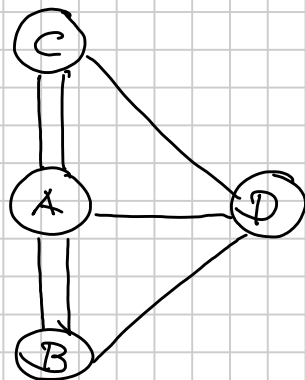
Gozintograph

(Lineare Algebra
Produktionsprozess)

Historisch : Beginn der Graphentheorie Leonard Euler
(1736)

Königsberger Brückenproblem

der passende Graph dazu



Mathematische Beschreibung von Graphen

Def: $G = (M, K, v)$

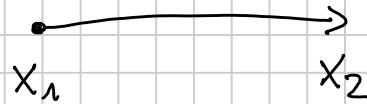
M : Menge von Knoten

K : Menge von Kanten

V : Abbildung, die jeder Kante zwei Knoten zuordnet

Knotenpaar geordnet: Richt vorgegeben

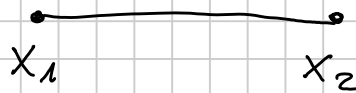
(x_1, x_2)



gerichteter Graph

Digraph

$\{x_1, x_2\}$



ungerichteter Graph

gewöhnlicher Graph

Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen adjazent

Die Kante, die mit einem Knoten verbunden ist, heißt inzident

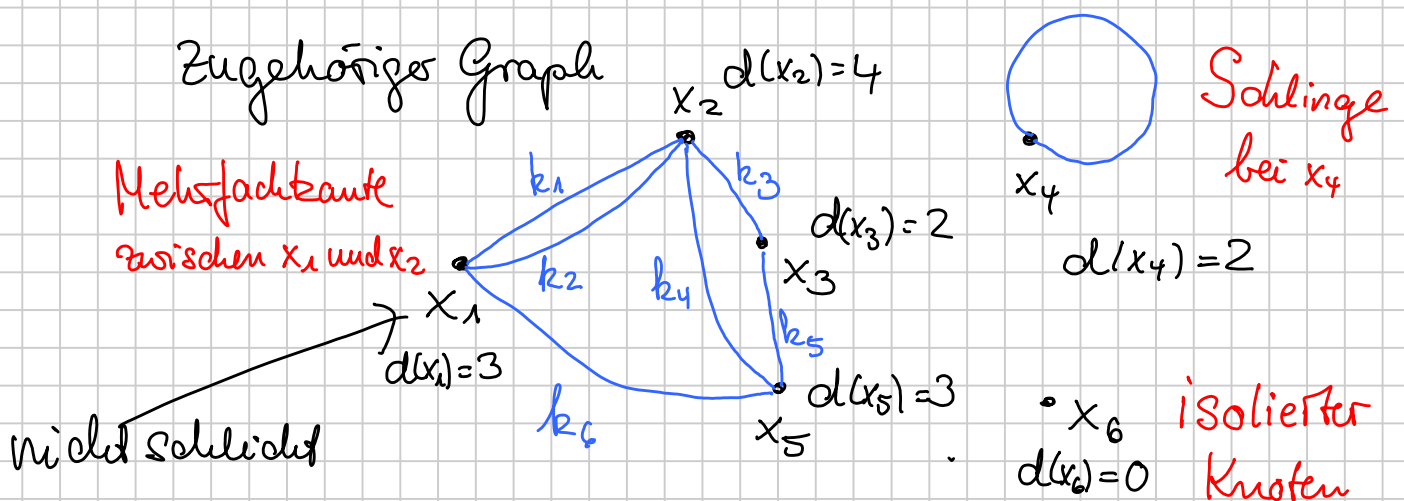
Bp: $G = (M, K, v)$ $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
 $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$

$v(k_1) = \{x_1, x_2\}$ $v(k_2) = \{x_1, x_2\}$ $v(k_3) = \{x_2, x_3\}$

$v(k_4) = \{x_2, x_5\}$ $v(k_5) = \{x_3, x_5\}$ $v(k_6) = \{x_1, x_5\}$

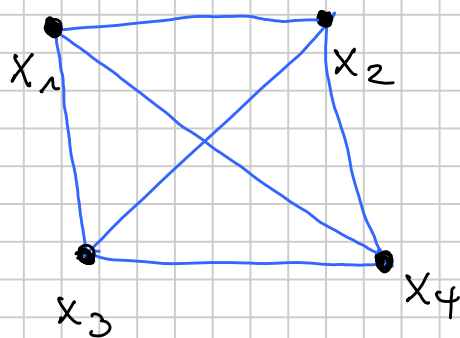
$v(k_7) = \{x_4, x_4\}$

Zugehöriger Graph



Def: Ein Graph heißt schlicht, wenn er keine Schlingen und keine Mehrfachkanten enthält!

Def: Ein ^{schlichter} Graph heißt vollständig, wenn je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind.



$$d(x_i) = 3 \quad i=1, \dots, 4$$

Def: Knotengrad

Die Anzahl der mit einem Knoten x_i inzidenten Kanten, heißt der Knotengrad $d(x_i)$

Dabei zählen Schlingen doppelt

Bei einem Digraphen wird zwischen abgehenden und ankommenden Kanten unterscheiden

$d^+(x_i)$: abgehenden Kanten

$d^-(x_i)$: ankommenden Kanten

Def: Zusammenhängender Graph

Ein gewöhnlicher Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten x_i, x_k stets eine Kantenfolge (damit einen Weg) von x_i nach x_k .

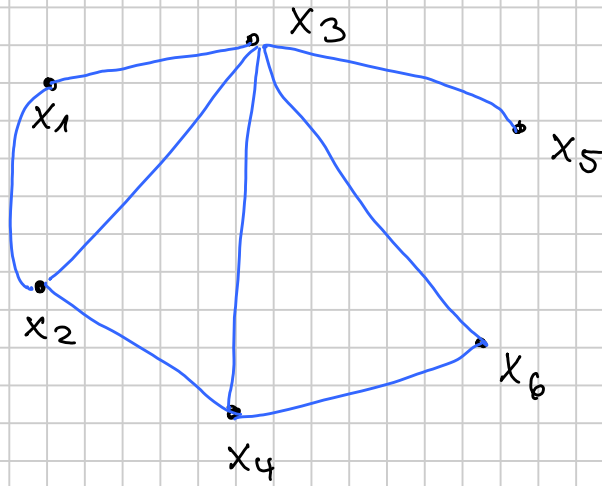
d.h. ein zus.häng. Graph hat keine isolierten Knoten

Def: Zusammenhangskomponente $Z(x)$ eines Knotens x ist die Menge der Knoten y , für die es einen Weg von x nach y gibt.

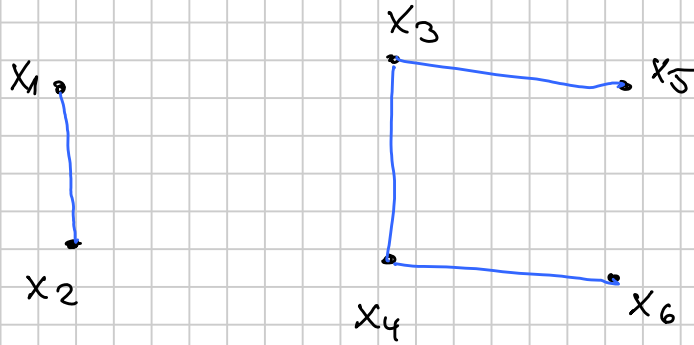
"Klasseneinteilung" der Knotenmenge

bilden jeweils einen zusammenhängenden Teilgraphen

Bp



Zusammenhängend

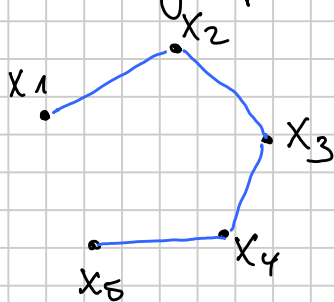


2 Zusammenhangskomponenten

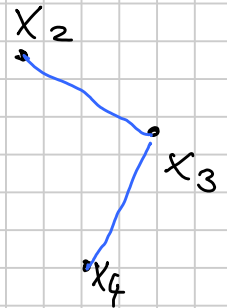
$\{x_1, x_2\}$

$\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$

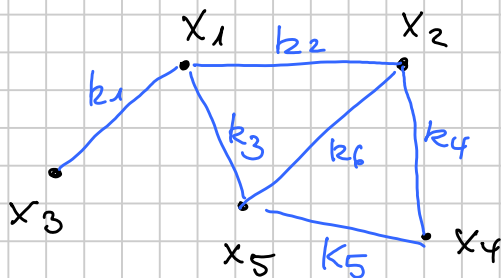
Bp. Untergraph



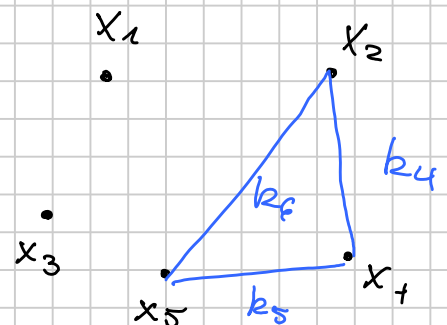
Weglassen von x_1 und x_5
(und damit auch die inzidenten Kanten)



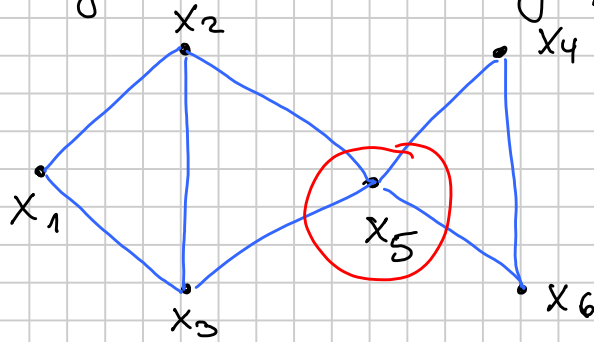
Teilgraph



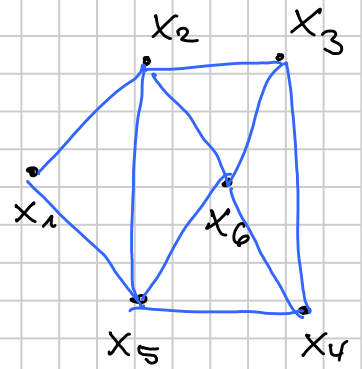
Weglassen von k_1, k_2, k_3



Wichtige Knoten in einem Graphen



x_5 ist ein trennender Knoten
= Artikulationspunkt



keine
trennende
Knoten
(= Artikulations-
punkte)

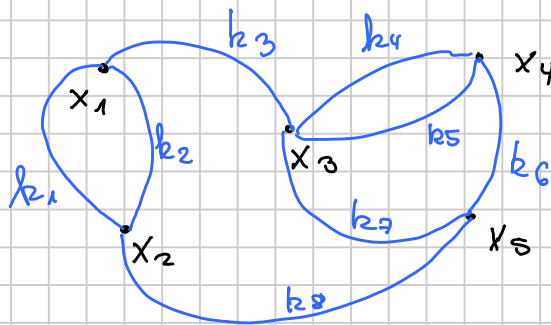
Def: Kantenfolge, Weg
geg: G Graph

Eine Kantenfolge ist eine Folge benachbarter Kanten mit nicht notwendig verschiedenen Knoten

Durch Kantenfolgen kann man Wege (z.B. Verkehrsweg) in einem Graphen beschreiben

Falls der Ausgangspunkt = Endpunkt: Kreis
Zyklus

Bp:



Start x_2 k_8 k_7 k_5 k_4 k_3 k_6 k_8 Kreis

Def: Kantenzug : keine Kante wird zweimal durchlaufen
(offen oder geschlossen)
(Start $\neq$ Ziel) (Start = Ziel)

Kantenweg : kein Knoten wird zweimal angestrichen

Def: Eulerische Linie (Eulerzug) (jede Kante 1x)

Ein Kantenzug, der jede Kante eines Graphen genau einmal durchläuft, heißt Euler'sche Linie oder Eulerzug.

Def: Hamiltonische Linie (jeder Knoten 1x)

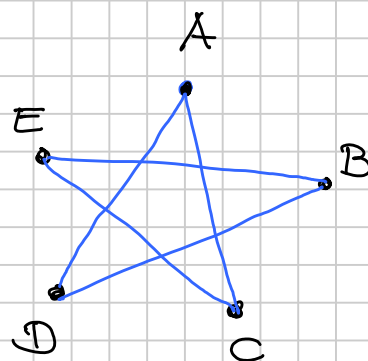
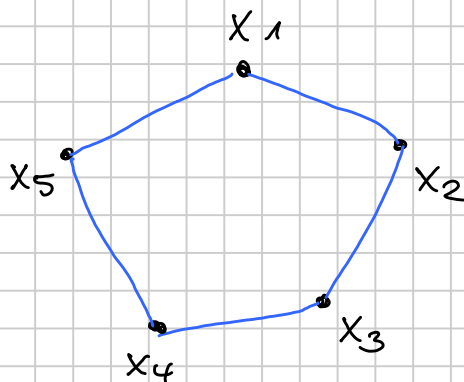
Ein Weg, der jeden Knoten eines Graphen genau einmal enthält, heißt Hamilton'sche Linie.

Satz (Euler 1736)

Ein endlicher, ungerichteter, nicht notwendig schlichter Graph $G = (M, K, v)$ hat genau dann eine Euler'sche Linie (Eulerzug), wenn G bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist und die Zahl z der Knoten mit ungeradem Knotengrad 0 oder 2 ist (d.h. der Knotengrad von höchstens 2 Knoten ist ungerade.)

Isomorphe Graphen

Bp:



$$\begin{aligned} d(x_1) &= 2 \\ d(x_2) &= 2 \\ d(x_3) &= 2 \\ d(x_4) &= 2 \\ d(x_5) &= 2 \end{aligned}$$

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\varphi(x)$	B	D	A	C	E

K (graph links) $\{x_1, x_2\}$ $\{x_2, x_3\}$ $\{x_3, x_4\}$ $\{x_4, x_5\}$ $\{x_5, x_1\}$
 K' (graph redub) $\{B, D\}$ $\{D, A\}$ $\{A, C\}$ $\{C, E\}$ $\{E, B\}$