Vorlesung Mathe 2
9.7.2018

Wichtige Anwendung von Binärbaumen

Binäre Suchbaum BST = Binary Search Tree

um Einträge aus großen Datenbeständen schnell wiederzufinden!

Kombination aus Suchbaum und Binärbaum

Bp Suche Sei s der Schlüssel

Ist s gleich dem Schlüssel, dann Ende

$s < x$: Suche beginnt beim linken "Kind"

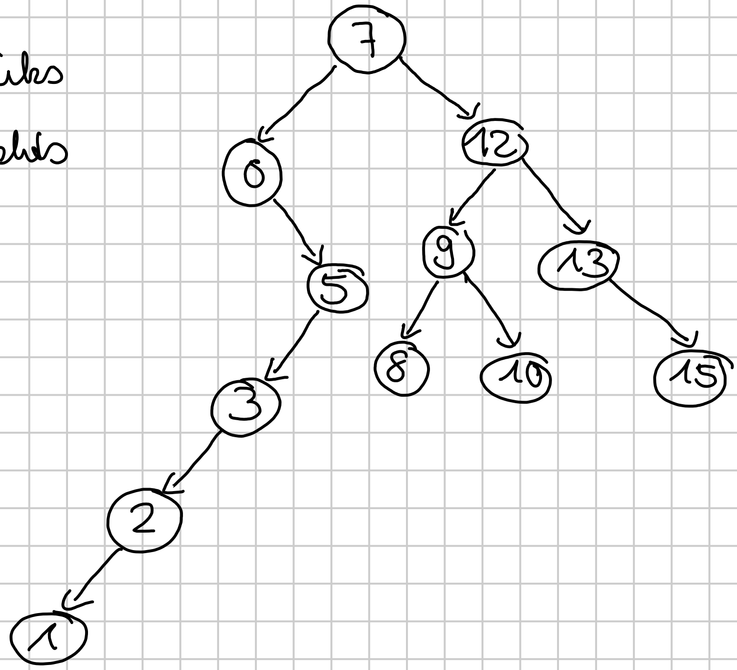
$s > x$: Suche beginnt beim rechten "Kind"

Solange, bis das Ziel erreicht

Bp: [7, 12, 0, 5, 9, 3, 8, 2, 13, 10, 15, 1]

$<$ links

$>$ rechts



Umfang der Suche : In einem Baum der Höhe H benötigt man maximal $V = H$ Vergleiche

Frage: Wieviele Einträge sind bei 10 Vergleichen speicherbar?

Anzahl der Knoten maximal : $2^{10} - 1 = 1024 - 1$
$= 1023$

Weitere Begriffe der Graphentheorie

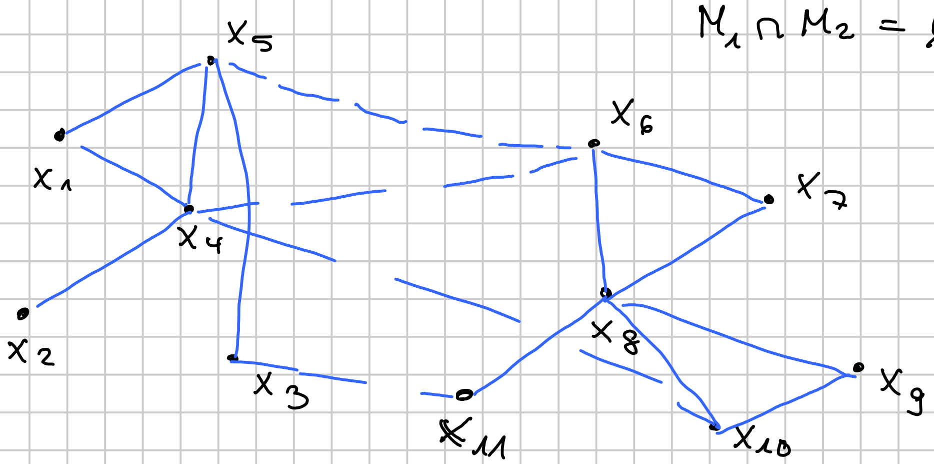
Def : Schnitt

Geg: Zusammenhängender Graph $G = (M, K, V)$

M_1 und M_2 seien nicht leere Teilmengen von M

$M_1 \subseteq M \quad , M_2 \subseteq M \qquad M_1 \cup M_2 = M$

$M_1 \cap M_2 = \emptyset$



$S = \{ \{x_5, x_6\}, \{x_4, x_6\}, \{x_4, x_{10}\}, \{x_3, x_{11}\} \}$

S heißt Schnitt

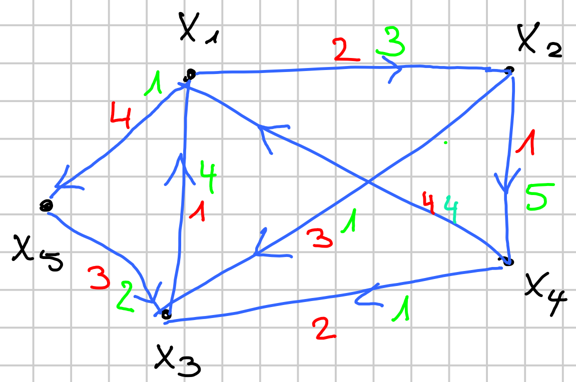
Durch Entfernen der Kanten aus S zerfällt der Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.

Def: Bewerteter Graph

Jeder Kante eines Graphen wird eine reelle Zahl zugeordnet! z.B. Kosten, Entfernungen etc.

Bp: Bewerteter Graph beim Travelling-Salesman-Problem

Optimierungsproblem: minimale Kosten beim Ansteuern aller "Knoten" eines bewerteten Graphen



rot: Kosten

grün: Transportzeiten

Schnellste Weg von x_4 nach x_1: direkt von x_4 nach x_1

Dauer: 4

kostengünstigste Weg von x_4 nach x_1: geht von x_4 nach x_3 und dann x_1

Kosten: $2+1=3$

Jetzt wieder: Matrizendarstellung von Graphen

Bereits bekannt: Adjazenzmatrix

$$A = (a_{ij}) \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (x_i, x_j) \text{ Kante} \\ 0 \end{cases}$$

Für gerichtete Graphen: $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Kante von } x_i \text{ nach } x_j \\ 0 \end{cases}$

Allgemein gilt für einen nicht schlichten Graphen:

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} ki, & \text{falls } i \neq j \text{ und } ki \text{ Kanten } (x_i, x_j) \text{ ex.} \\ 2ki, & \text{falls } i = j \text{ und } ki \text{ Schlingen bei } x_i \text{ ex.} \end{cases}$$

im Falle 1 Schlinge bei x_i: 2

Im Falle eines bewerteten Graphen

$$A = (a_{ij}) \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} \text{Bewertung von } (x_i; x_j) & \text{falls } (x_i; x_j) \text{ Kante} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Matrix, die Kanten und Knoten in Verbindung bringt: Inzidenzmatrix

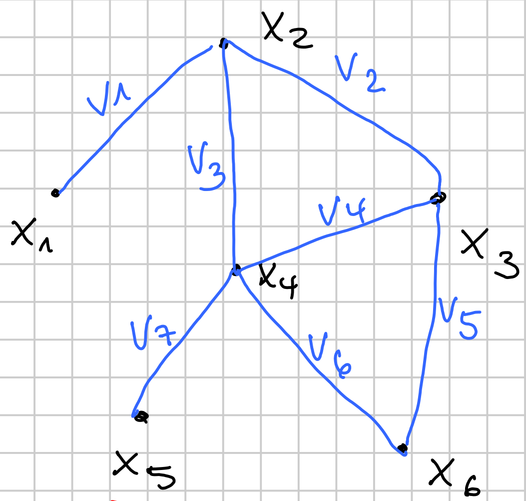
Kanten und Knoten werden bezeichnet

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_j \text{ mit } x_i \text{ inzidiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$j = 1, \dots, k$ Anzahl der Kanten

$i = 1, \dots, n$ Anzahl der Knoten

Bp:



$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & \boxed{v_2} & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

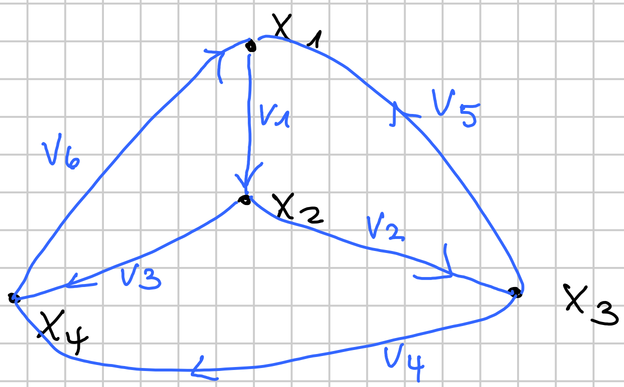
Bp.

In jeder Spalte 2 Einsen, genau in den Zeilen der Knoten, zwischen denen die Kante verläuft.

Für einen Digraphen gilt: $B = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_j \text{ von } x_i \text{ ausgeht} \\ -1 & \text{wenn } v_j \text{ bei } x_i \text{ ankommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bp:

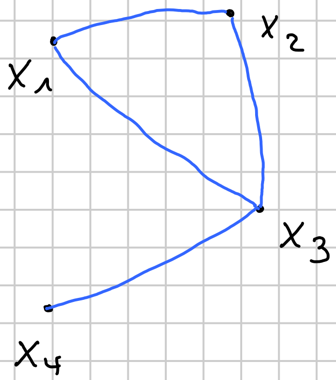


Inzidenzmatrix:

$$\begin{array}{c|cccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \hline x_1 & \multicolumn{6}{c}{} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & \boxed{-1} & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Bedeutung der Adjazenzmatrix

Man kann A auch auffassen als Matrix, die alle Wege der Länge 1 in einem Graphen dokumentiert

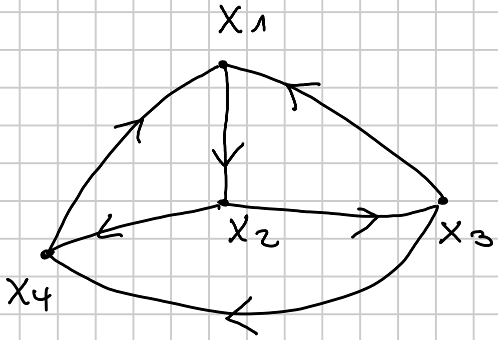


$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = A$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{A^2}$$

Stellt die Anzahl der Wege der Länge 2 dar

Bp:



$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}_{A^2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{A^3}$$

Wege der Länge