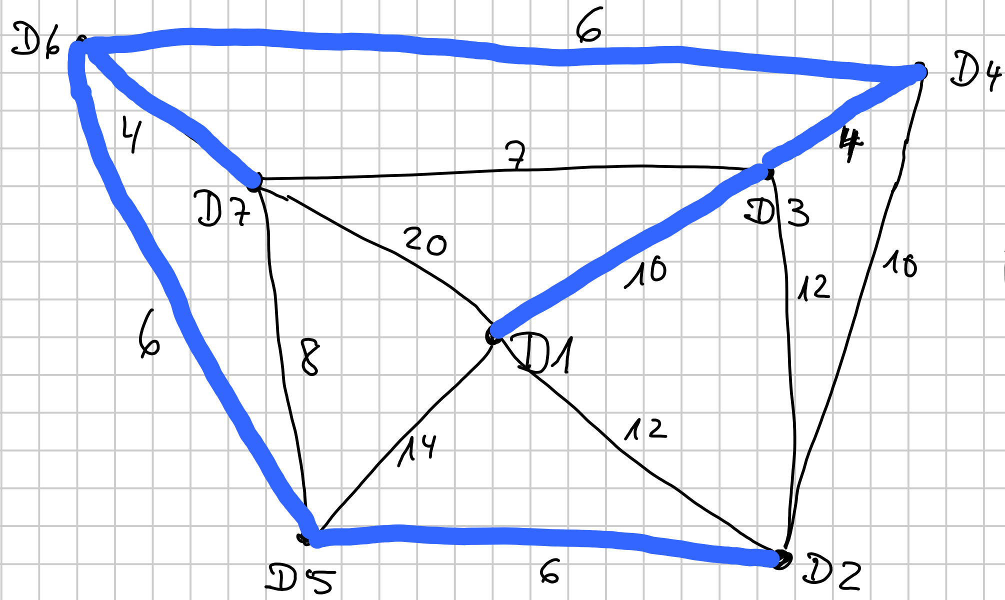
Vorlesung Mathematik

16.7.2018



Minimale Gesamtkosten: 36

Bestimmung kürzester und längster Wege in Graphen

hier: kürzeste Wege in gerichteten oder ungerichteten Graphen

Bsp: Transportwege, Routenplaner

I single source shortest paths

II all pairs shortest paths

Markierungsalgorithmus zur Bestimmung kürzester Wege in einem bewerteten ungerichteten Graphen: Dijkstra

Algorithmus von Dijkstra zur Ermittlung kürzester Wege von einem Startknoten x_0 zu allen anderen Knoten des Graphen

Geg: $G = (M, K, v, d)$ ← Bewertung $\qquad d(k) > 0$ für alle $k \in K$

1) Startknoten x_0 : $D(x_0) = 0$ ist markiert

im Bp: Startknoten x_7 $D(x_7) = 0$

2) Sei M^* die Menge aller Knoten x_s der Kanten (x_r, x_s), deren Knoten x_r in M_i liegt — i ist Iterationsnummer

$$M^* = \{x_s \in M \setminus M_i \mid \text{es gibt eine Kante } (x_r, x_s) \text{ mit } x_r \in M_i\}$$

Falls $M^* = \emptyset$, weiter mit (6), falls $M^* \neq \emptyset$, weiter mit (3)

im Bp: $M^* = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}\}$ die Menge der zu x_7 benachbarten Knoten

3) Ermitteln der Entfernungen $D(x_s)$, $x_s \in M^*$ (vorläufige Markierung)

$$D^*(x_s) = \min\left(D(x_r) + d(x_r, x_s)\right)$$

x_s	x_2	x_4	x_5	x_6	x_9	x_{10}
$D^*(x_s)$	12	7	5	9	$\boxed{2}$	4

4) Markiere den Knoten $x_s^* := x_i$ endgültig mit $D(x_i) = D^*(x_i)$

es gilt $D^*(x_s^* := \min D^*(x_s))$

5) Setze $M_{i+1} = M_i \cup \{x_i\}$

weiter mit (2)

$D^*(x_9) = 2$ $\qquad D(x_9) = d(x_7, x_9)$

Iteration 1 : $D^*(x_s) = \min\left(D(x_r) + d(x_r, x_s)\right) = 2$

Markiere die Kante $D(x_9) = 2$

$M_2 = M_1 \cup \{x_9\} = \{x_7, x_9\}$

Iteration 2 : $M^* = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{10}\}$

alle zu x_7 und x_9 benachbarte Knoten

Ermittlung der Entfernungen $D(x_s)$, $x_s \in M^*$

direkt von x_7 oder über x_9 erreichbar

x_s	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	12	8	2 Mögl. 7; $2+1=3$	5	9	4

$$D(x_4) = 3$$

Markiere die Kante (x_9, x_4)

$$M_3 = M_2 \cup \{x_4\} = \{x_7, x_9, x_4\}$$

Iteration 3 : Alle zu x_4, x_7, x_9 benachbarte Knoten:

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_{10}\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	4

$$D(x_{10}) = 4$$

Markiere die Kante (x_7, x_{10})

$$M_4 = M_3 \cup \{x_{10}\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}\}$$

Iteration 4 $M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8\}$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	16

$D(x_5) = 5$

Markiere die Kante (x_7, x_5)

$M_5 = M_4 \cup \{x_5\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5\}$

Iteration 5: $M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8\}$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	$\boxed{6}$	9	7

$D(x_3) = 6$

Markiere die Kante (x_4, x_3)

$M_6 = M_5 \cup \{x_3\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5, x_3\}$

Iteration 6: $M^* = \{x_1, x_2, x_6, x_8\}$

x_s	x_1	x_2	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	10	9	$\boxed{7}$

$D(x_8) = 7$

Markiere die Kante (x_5, x_8)

$M_7 = M_6 \cup \{x_8\} = \{x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$

Iteration 7: $M^* = \{x_1, x_2, x_6\}$

x_s	x_1	x_2	x_6
$D^*(x_s)$	14	10	$\boxed{8}$

$$D(x_6) = 8$$

Markiere die Kante (x_6, x_8)

$$M_8 = M_7 \cup \{x_6\}$$

Iteration 8 : $M^* = \{x_1, x_2\}$

x_s	x_1	x_2
$D^*(x_s)$	14	$\boxed{10}$

$D(x_2) = 10$ Markiere die Kante (x_3, x_2)

$$M_9 = M_8 \cup \{x_2\}$$

Iteration 9 : $M^* = \{x_1\}$

x_s	x_1
$D^*(x_s)$	$\boxed{13}$

$$D(x_1) = 13$$

Markiere die Kante (x_2, x_1)

Damit sind alle Knoten erreicht

$D(x_1) = 13$ Iter. 9
$D(x_2) = 10$ It. 8
$D(x_3) = 6$ It. 5
$D(x_4) = 3$ It. 2
$D(x_5) = 5$ It. 4
$D(x_6) = 8$ It 7
$D(x_7) = 0$ It. 0

$D(x_8) = 7$ It 6
$D(x_9) = 2$ It 1
$D(x_{10}) = 4$ It. 3

Flüsse und Schnitte in Netzwerken

Def: Netzwerk $N = (\underset{\text{Knoten}}{V}, \underset{\text{Kanten}}{E}, \underset{\text{Quelle}}{s}, \underset{\text{Senke}}{t}, \underset{\text{Kapazitätsfunktion}}{c})$

gerichteter Graph ohne Mehrfachkanten mit
zwei ausgezeichneten Knoten s Quelle
t Senke
c Kapazitätsfunktion

Def: s-t-Fluss

Belegung der Kanten mit nicht neg. reellen Zahlen und folgenden Bedingungen:

1) Keine Kante darf mit einem höheren Wert als ihre Kapazität belegt sein
2) In jedem Knoten (ausser s und t) muss genausoviel hineinfließen wie hinausfließt
Flusserhaltung

Def: Wert des s-t-Flusses

Bp: Paketzustelldienst