V MA2 – 3.4.2019

Tutorium Di 11–13 Jan Schröder, Yannick Dittmar 3.110, ab 9.4.

Mi: 13–15 Leonie Eichler 2.108, ab 10.4.

Wahrscheinlichkeitstheorie

Bsp zu Def 10.9

a) Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

mögl. Ereignisse: $A = \{6\}$ "Sechs"

$B = \{1, 3, 5\}$ "ungerade"

$C = \{1, 2\}$ "< 3"

zu C komplementär $\overline{C} = \Omega \setminus C = \{3, 4, 5, 6\}$

" B " $\overline{B} = \Omega \setminus B = \{2, 4, 6\}$ "gerade"

b) Roulette $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$

Ereignisse z.B. "gerade"

"ungerade"

"1 - 12" usw

Folgerung aus den Wahrsch. axiomen

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

denn: $\overline{A}$ und A sind zueinander unvereinbar

$$P(A) + P(\overline{A}) \overset{Ax.3}{=} P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) \overset{Ax.2}{=} 1$$

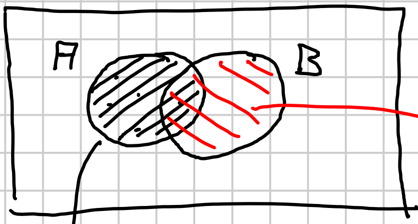
$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2. $P(\{\}) = 0$

denn: spezialisiere Nr. 1 auf $\overline{A} = \{\}$ und $A = \Omega$

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

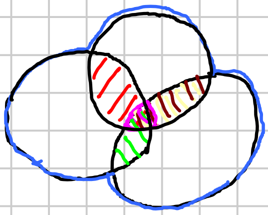
Graphische Erklärung



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}$$

die doppelt gezählte Fläche einmal wieder abziehen

Inklusion-Exklusion für 3 Mengen A, B, C



$|A \cup B \cup C|$

$= |A| + |B| + |C|$

$- |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$

$+ |A \cap B \cap C|$

Verschiedene Dinge die man zählen kann beim Urnenexperiment

Stichprobe: k Elemente aus Urne mit n Kugeln entnehmen

Ergebnis →	geordnet (Variation)	ungeordnet (Kombination)
Ziehen mit Zurücklegen (ZmZ)	Wörter aus Alphabet	geheime Wahlausgänge
Ziehen ohne zurücklegen (ZoZ)	Pferdewetten	Lotto "6 aus 49" Los-ziehen, k-fach

Wie viele Wörter Länge 5 aus Alphabet $\{a, b, c, d\}$ ("abbca" und "aacbb" sind versch. Worte)

Pferdewetten: 8 Pferde, wieviele mögliche Wettscheine (Erster, Zweiter, Dritter)

$$\boxed{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5}\cdot\ \cdot \cancel{1}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\ \cancel{1}}}$$

Beweis / Erklärung zu Satz 10-4

1) ZmZ / geordnet: Jeder Platz der k-elementigen Teilmenge kann mit n Elementen besetzt werden:

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n}_{k\text{-mal}} = \boxed{n^k}$$

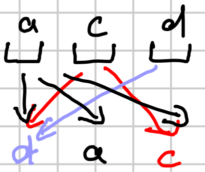
2) ZoZ / geordnet:

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\text{-mal}} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

3) ZoZ / ungeordnet: (Lotto)

wie bei 2), also $\frac{n!}{(n-k)!}$, nur dass wir alle Permutationen der k-elementigen Liste als <u>ein</u> Resultat zählen

Wie viele Permutationen gibt es?



$$k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1 = k!$$

$\Rightarrow$ es gibt $k!$ solche Permutationen

D.h. Anzahl bei 3) ist

$$\frac{\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \boxed{\binom{n}{k}} \quad \text{Binomialkoeff.}$$

<u>Übungen</u>

Ü1: a) Wörter Länge 4 aus 26er-Alphabet

$n = 26$, $k = 4$, ZmZ, geordnet: $n^k = \underline{\underline{26^4}}$

b) Wörter Länge 4 aus 5er-Alphabet

$n = 5$, $k = 4$, $\Rightarrow n^k = 5^4$

Laplacescher Spezialfall, alle Worte gleichwahrsch.

$$P(A) = \frac{\text{günstige Ereignisse}}{\text{alle Ereignisse}} = \frac{5^4}{26^4} = \left(\frac{5}{26}\right)^4 = 0{,}137\,\%$$

Ü2 a) Pferdewette: ZoZ, geordnet: $\frac{n!}{(n-k)!}$

$n = 8$, $k = 3$ $\Rightarrow$ $\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \underline{\underline{336}}$

b) P(zufällig den Ersten richtig) $= \frac{1}{8}$

$$\frac{1 \cdot 7 \cdot 6}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{8}$$

Ü3 a) $\binom{49}{6}$