

Vorlesung Mathematik 2

3.6.2019

Mehrdimensionale Differentialrechnung

WS: Differentialrechnung $y = f(x)$

1 unabh. Variable

Volumen Zylinder



$$V(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Volumen: Funktion mit 2 unabh. Variablen

anderes Bp: Wurfparabel beim schiefen Wurf

$$W(\alpha, v_0) = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

g : Erdbeschleunigung

$$\text{Def: } f: D \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \quad \begin{matrix} D \subseteq \mathbb{R}^n \\ \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$$

$$n=2 : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, x_2)$$

n -Tupel
 $\in \mathbb{R}^n$

geordnetes Paar
 $\in \mathbb{R}^2$

Schreibweise für $n=2$: $z = f(x, y)$

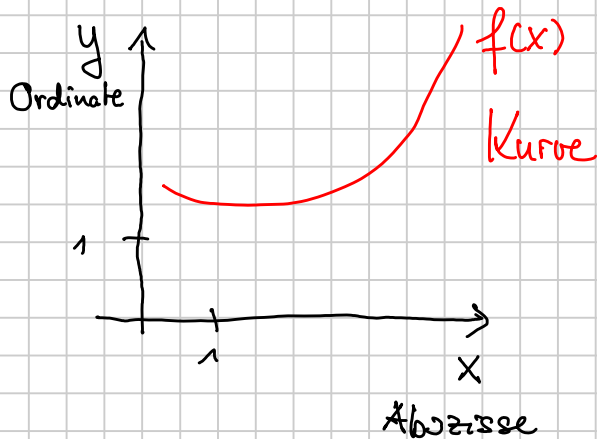
hier:

x, y unabhängige Variablen

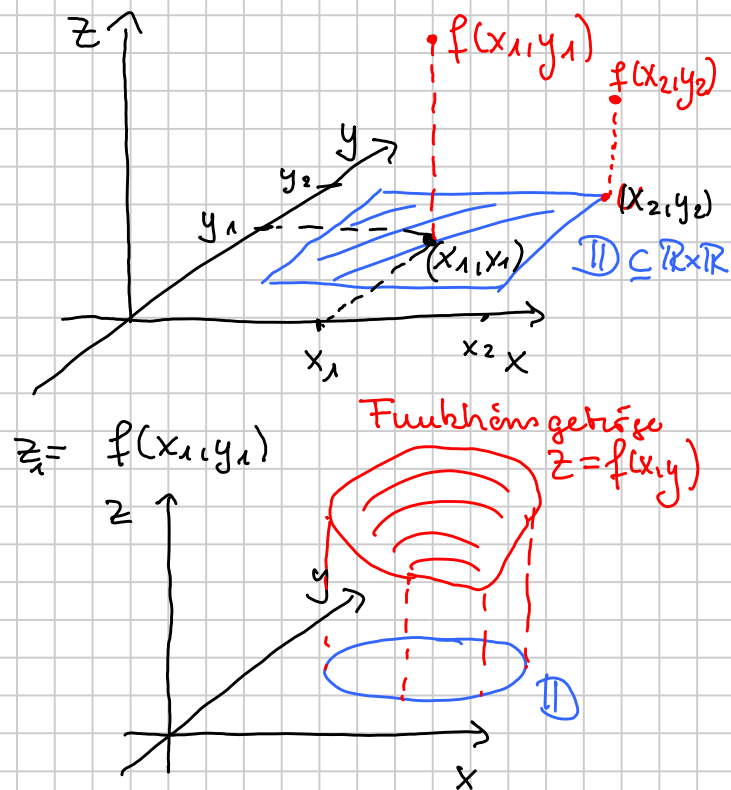
z : abhängige Variable

Darstellungsmöglichkeiten – Grafische Darstellung

1 unabh. Variable



2 unabh. Variablen



Bp fur eine "3D"-Funktion

Weitere Darstellungsformen:

analytisch : $z = f(x, y)$ explizite Form
 $F(x, y, z) = 0$ implizite Form

Funktionsstabelle

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	z_{11}	z_{12}		
x_2	$= f(x_1, y_1)$	$= f(x_1, y_2)$		
...				
x_n				

Bp: $f(x, y) = 110 - 10x + 5y$
 Ebene im Raum

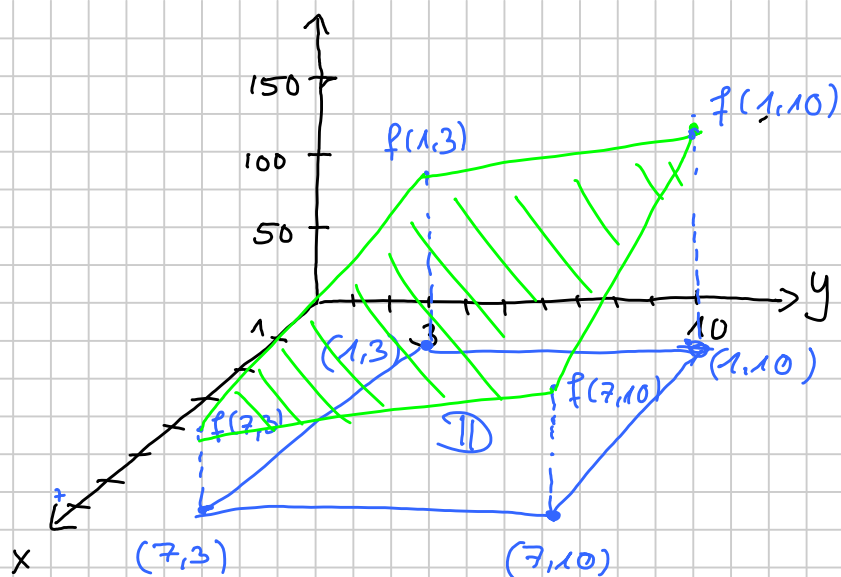
$1 \leq x \leq 7$
 $3 \leq y \leq 10$

$$f(1,3) = 115$$

$$f(1,10) = 150$$

$$f(7,3) = 55$$

$$f(7,10) = 90$$



Funktionsgröße : nicht lineare Funktionen

Bp: $z = f(x,y) = 9 - 3x^3 + x \cdot y + 4y^2$

$$z = f(x,y) = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$$

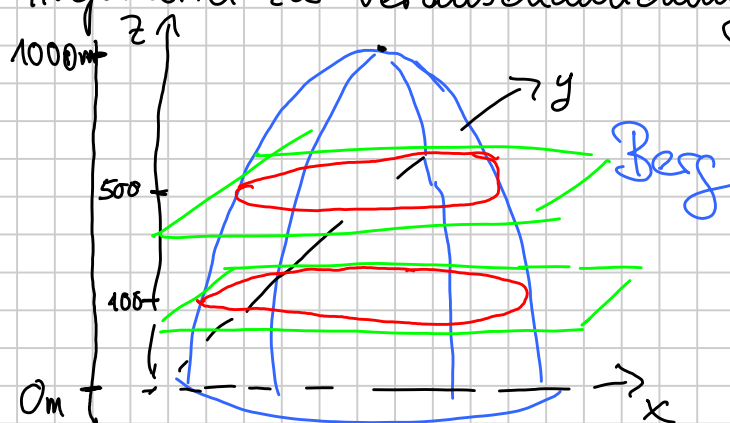
$$z = f(x,y) = y + \ln x + e^{x \cdot y}, \quad x > 0$$

"Flächen in $\mathbb{R}^3$ "

3D-Funktionen

Bp: $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

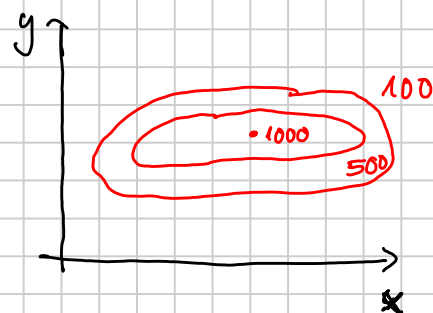
Hilfsmittel zur Veranschaulichung der Fläche



$$z = f(x,y)$$

$$100 = f(x,y)$$

$$500 = f(x,y)$$



Höhenlinien : z wird konstant gehalten

Höhenlinien für $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

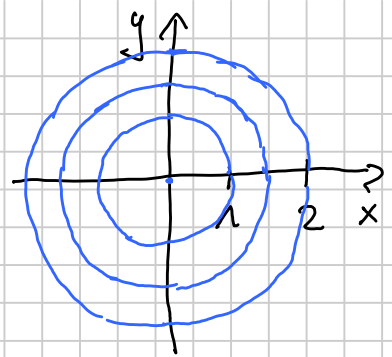
Wähle $z = c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$C=0 : 0 = x^2 + y^2$$

$$C=1 : 1 = x^2 + y^2$$

$$C=2 : 2 = x^2 + y^2$$

$$C=4 : 4 = x^2 + y^2$$



Schnittkurvendiagramm parallel zur x, z -Ebene
(y konstant)

Wähle $y_1 = 0$
 $y_2 = 1$
 $y_3 = 2$

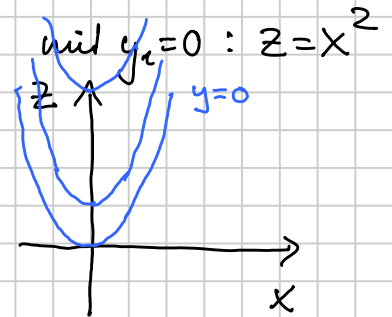
$$z = x^2 + y^2$$

$$y_2 = 1:$$

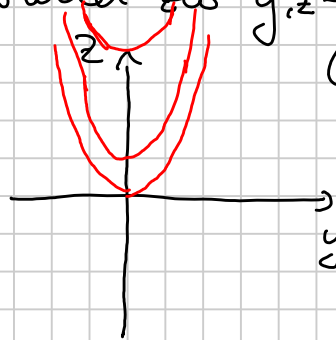
$$z = x^2 + 1^2$$

$$= x^2 + 1$$

$$y_3 = 2 : z = x^2 + 4$$



Schnittkurvendiagramm parallel zur y, z -Ebene
(x konst.)



Fläche ist ein sog. Rotationsparaboloid

Bp: $z = f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$