Vorlesung Mathematik 2
5.6.2019

Pfingstmontag Feiertag! keine V + keine Ü
nächste Vorlesung: Mi 12.6.2019

Eigenschaften von mehrdimensionalen Funktionen

Nullstellen hier: 2 unabh. Variablen

(x_0, y_0) heißt Nullstelle $\Leftrightarrow f(x_0, y_0) = 0$

Bp: $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

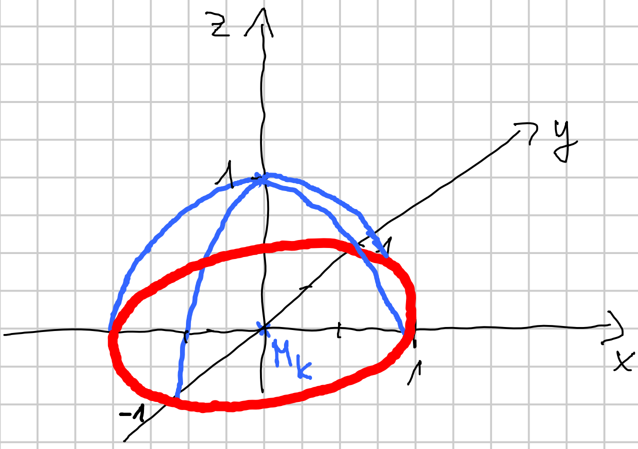
Nullstellen: Schnittkurve mit x,y-Ebene

$z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2-y^2} = 0 \quad |()^2$

$1-x^2-y^2 = 0 \quad | +x^2+y^2$

$1 = x^2+y^2$ Kreis um 0 mit $r=1$

(Erinnerung $x^2+y^2=r^2$ Gleichung des Kreises um 0 mit Radius r)

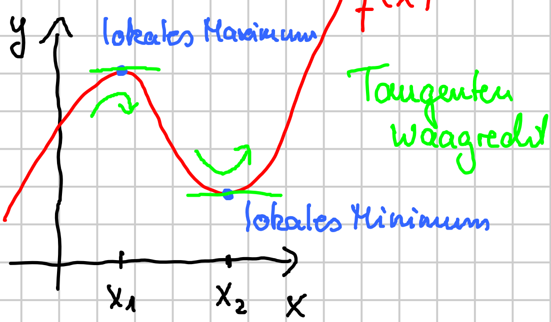


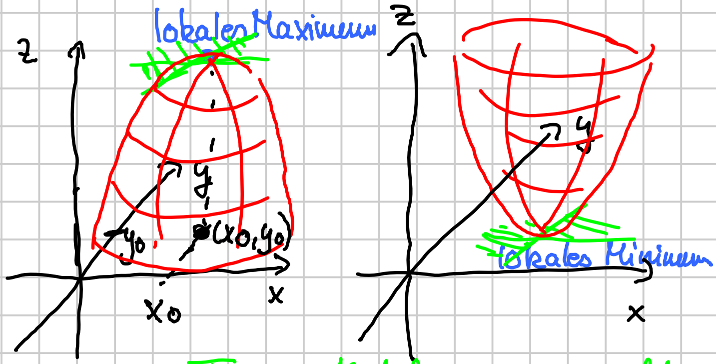
Halbkugel mit Mittelpunkt bei (0,0)

NB: Halbkugel wie oben, aber Radius $r = 2$: $z = f(x,y) = \sqrt{\underset{r^2}{4}-x^2-y^2}$

Zusammenfassung: Nullstellen sind "Schnittkurven" mit der x,y-Ebene: $z = f(x,y) = 0$

Extremwerte





Tangentialebenen waagrecht

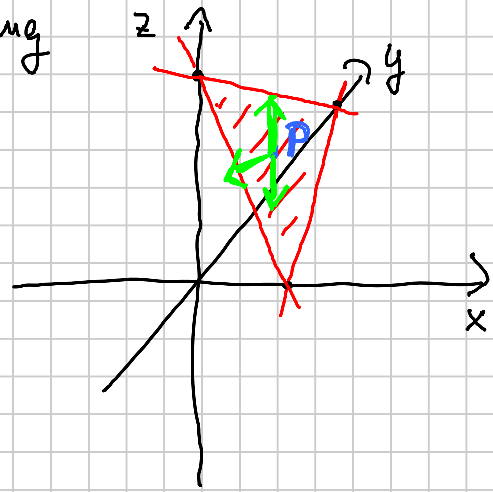
Def: $z = f(x,y)$ besitzt in (x_0,y_0) ein Max. (bzw. Min.)

$\Leftrightarrow$ für alle $(x,y) \in U_\varepsilon(x_0,y_0)$
(ε-Umgebung)

gilt: $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ (Max.)

$f(x,y) > f(x_0,y_0)$ (Min.)

Steigung



Angabe einer Steigung nur mit einer Richtungsangabe sinnvoll

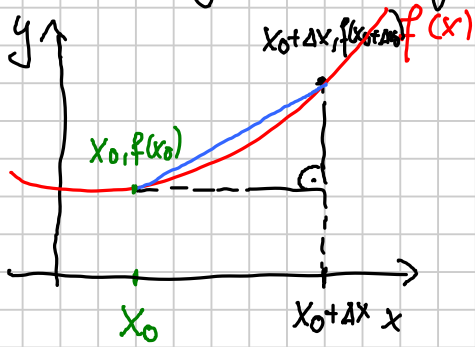
Man nimmt die Steigungen der Schnittkurven parallel zur

(x,z) - Ebene (y konstant)

bzw. (y,z) - Ebene (x konstant)

Angabe einer Richtung $\Rightarrow$ partielle Ableitung 1. Ordnung

WS : $y = f(x)$ $\qquad y' = f'(x)$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0+\Delta x - f(x_0)}{x_0+\Delta x - x_0} \right) = f'(x_0)$$

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$ Partielle Ableitung nach x

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$ Partielle Ableitung nach y

2 unabh. Variablen $\Rightarrow$ 2 partielle Ableitungen 1. Ordnung

n unabh. Variablen $\Rightarrow$ n partielle Ableitungen 1. Ordnung

Def: $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ sei Fkt. mit n unabh. Variablen

$$f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

$i = 1, \ldots, n$

partielle Ableitung 1. Ordnung nach der Variablen x_i

Def: Die Auflistung sämtlicher partieller Ableitungen 1. Ordnung einer Fkt. mit n unabh. Variablen, heißt Gradient.

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor

$$\operatorname{grad} f = \left(f_{x_1} \ \cdots \ f_{x_n} \right)$$

Zeilenvektor

Bp: $z = f(x,y) = e^{x\cdot y}$ Bestimmen Sie den Gradienten!

(1) $f_x(x,y) = y\cdot e^{xy}$

$f_y(x,y) = x\cdot e^{xy}$

$\text{grad } f = \begin{pmatrix} y\cdot e^{xy} \\ x\cdot e^{xy} \end{pmatrix}$

NB: $f(x) = x^5\cdot 7$

$f'(x) = 5\cdot x^4\cdot 7$

(2) $z = f(x,y) = x^n\cdot y^m \quad n,m\in\mathbb{N}$

$f_x(x,y) = n\cdot x^{n-1}\cdot y^m$

$f_y(x,y) = x^n\cdot m\cdot y^{m-1}$

(3) $z = f(x,y) = x\cdot \ln y$

$f_x(x,y) = 1\cdot \ln y = \ln y$

$f_y(x,y) = x\cdot\frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

(4) $z = f(x,y) = \sin x\cdot\cos y$

$f_x(x,y) = \cos x\cdot\cos y$

$f_y(x,y) = \sin x\cdot -\sin y = -\sin x\cdot\sin y$

(5) $z = f(x,y) = 2xy - 3x^2 + \frac{1}{y}$

Bestimmen Sie den Gradienten an der Stelle $(x,y) = (2,1)$

$f_x(x,y) = 2y - 6x$

$f_y(x,y) = 2x - \frac{1}{y^2}$

$\text{grad } f(2,1) = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$

⑥ $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2xy} + 3x$

Bestimmen Sie den Gradienten an der Stelle $(x,y) = (0,2)$
und $(x,y) = (1,-6)$

$$f_x(x,y) = \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{innere Abl.}} - 2y\,\underbrace{e^{2xy}}_{\text{äußere Abl.}} + 3$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x \cdot e^{2xy}$$

$$\text{grad}\,(0,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad}\,(1,-6) = \begin{pmatrix} 3.027 \\ -0.3243 \end{pmatrix}$$