Vorlesung Mathematik 2

12.6.2019

Bp. $u(x,y,z) = 2x\cdot e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Bestimmen Sie den Gradienten grad $u(x,y,z)$

$$u_x(x,y,z) = 2e^{yz} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x$$
$$= 2e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_y(x,y,z) = 2xz\cdot e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_z(x,y,z) = 2xy\cdot e^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

NR:

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \sqrt{x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$

Achtung: Bei der Berechnung der partiellen Ableitungen bitte auch sämtliche Differentiationsregeln beachten!

1) $f(x,y) = y\cdot e^{x^2+y^2}$

$f_x(x,y) = y\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2x = 2xy\cdot e^{x^2+y^2}$ $\boxed{\text{Kettenregel}}$

$f_y(x,y) = 1\cdot e^{x^2+y^2} + y\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2y$
$= e^{x^2+y^2} + 2y^2\cdot e^{x^2+y^2}$

2) $f(x,y) = \dfrac{e^x\cdot \sin(y)}{e^y\cdot\cos(x)}$ $\boxed{\text{Quotientenregel}}$

$f = \frac{u}{v}$

$f' = \frac{u'v - u\cdot v'}{v^2}$

$$f_x(x,y) = \frac{e^x\cdot\sin(y)\cdot e^y\cdot\cos(x) + e^x\cdot\sin(y)\sin(x)\cdot e^y}{(e^y\cdot\cos(x))^2}$$

$u = e^x\cdot\sin(y)$ $u' = e^x\cdot\sin(y)$

$v = e^y\cdot\cos(x)$ $v' = -e^y\cdot\sin(x)$

(nach "x")

$$f_y(x,y) = \frac{e^x\cdot\cos(y)\cdot e^y\cdot\cos(x) - e^x\cdot\sin(y)\cdot e^y\cdot\cos(x)}{(e^y\cdot\cos(x))^2}$$

$u = e^x\cdot\sin(y)$ $u' = e^x\cdot\cos(y)$

$v = e^y\cdot\cos(x)$ $v' = e^y\cdot\cos(x)$

(nach "y")

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Fall: $z = f(x,y)$

$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$: 2 partielle Abl. 1. Ordnung
jeweils wieder Fkt. m. 2 unabh. Variablen

$f_x \xrightarrow{\text{nach } x} \boxed{f_{xx}}$ zweimal nach x abgeleitet

$f_x \xrightarrow{\text{nach } y} \boxed{f_{xy}}$ erst nach x, dann nach y abgeleitet

$f_y \xrightarrow{\text{nach } x} \boxed{f_{yx}}$ erst nach y, dann nach x abgeleitet

$f_y \xrightarrow{\text{nach } y} \boxed{f_{yy}}$ erst nach y, dann nach y abgeleitet

f_{xx}, f_{yy} heißen die direkten Ableitungen 2. Ordnung

f_{xy}, f_{yx} " " gemischten " "

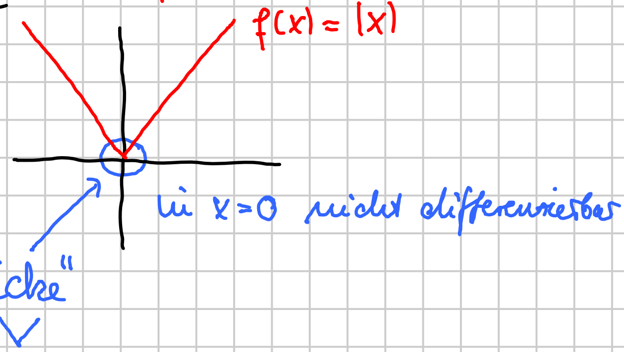
Erinnerung $y = f(x)$

$y' = f'(x)$ Maß für die $\boxed{\text{Steigung}}$: Wie verändert sich $f(x)$, wenn sich x verändert?

$y'' = f'(f'(x))$ Maß für die $\boxed{\text{Krümmung}}$: Wie verändert sich $f'(x)$, wenn sich x verändert?

Stetige Fkt:

Diffb. Fkt: ohne "Ecken"



Satz von Schwarz

Ist f mit n Variablen m-mal stetig diffbar, dann sind die gemischten Ableitungen m-ter Ordnung unabh. von der Reihenfolge des Differenzierens

Hinweis auf "Gradientenvektor"

Darstellung der Ableitungen 2. Ordnung einer Fkt. mit n unabh. Variablen in einer Matrix: $f(x) = f(x_1, \dots x_n)$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$

$$H(X) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) & \dots & f_{x_1x_n}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & \dots & \dots & f_{x_2x_n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & \dots & \dots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

direkte Ableitungen

f stetig diffbar, dann ist $H(x)$
quadratische Matrix
symmetrische Matrix

Hesse - Matrix
Jacobi - Matrix
Funktionalmatrix

Bp: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 x_3 + x_3$

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2 x_3 \\ x_2^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Überblick über die part. Abl. 2. Ordnung

Gesucht ist der Wert von grad $(1,-1,-1)$

und von $H(1,-1,-1)$

$$\operatorname{grad}(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad H(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Extremwerte für Fkt. mit 2 unabh. Variablen:

notwendige und hinreichende Bedingungen

Erinnerung: $y = f(x)$ 1 unabh. Variable

notw. Bed. für einen Extremwert (lok): $f'(x) = 0$

hinr. Bed. für Max.: $f''(x) < 0$

für Min.: $f''(x) > 0$

für Sattelpkt: $f''(x) = 0$

Geg: $f(x,y) = z$

Notwendige Bedingung für Extremwert bei (x_1,y_1): $\operatorname{grad}(x_1,y_1) = 0$,

d.h. $f_x(x_1,y_1) = 0$

$f_y(x_1,y_1) = 0$

"Die part. Abl. 1. Ordnung verschwinden"

Hinreichende Bedingungen:

$$\Delta(x_1,y_1) = f_{xx}(x_1,y_1) \cdot f_{yy}(x_1,y_1) - [f_{xy}(x_1,y_1)]^2 > 0$$

Ist $f_{xx}(x_1,y_1) < 0$ Max.

$f_{xx}(x_1,y_1) > 0$ Min.

falls $\Delta < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$\Delta = 0 \Rightarrow$ keine Entscheidung möglich

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \qquad \Delta = f_{xx} f_{yy} - [f_{xy}]^2$$

Determinante von $H(x)$