Vorlesung Mathematik 2

17. 6. 2019

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Fkt. mit n unabh. Variablen

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

Notwendige Bed: $\operatorname{grad}_f(x) = 0$

Sämtliche partielle Abl. 1. Ordnung „verschwinden"

Lösung(en): Kandidaten für Extremwerte

Sei $x = (x_1, \dots x_n)$ ein Kandidat

dann ist $\operatorname{grad}_f(x) = 0$

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x}(x) & \cdots & f_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & \cdots & \cdots & f_{x_{nn}}(x) \end{pmatrix}$$

Hesse Matrix

$$\text{Sei } H_i = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \cdots & f_{x_1x_i}(x) \\ \vdots & & \\ f_{x_ix_1}(x) & \cdots & f_{x_ix_i}(x) \end{vmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

Hauptunterdeterminante

hinreichende Bed : x ist lokales Maximum

$\Leftrightarrow H_1 < 0 \, , H_2 > 0 \, , H_3 < 0$

$$H_n \begin{cases} < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

x ist lokales Minimum

$\Leftrightarrow H_1 > 0 \, , H_2 > 0 \, , H_3 > 0 \; --- \, H_n > 0$

Bp.: $z = f(x,y) = x - 8y - x^2 + x \cdot y - y^2$
Untersuchen Sie auf Extremwerte!

Notw.:
$$f_x(x,y) = 1 - 2x + y = 0$$
$$f_y(x,y) = -8 + x - 2y = 0$$

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 1 - 2x + y = 0 & | \cdot 2 \\ \text{II} & -8 + x - 2y = 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} & 2 - 4x + 2y = 0 & \\ + & -8 + x - 2y = 0 & \\ \hline & -6 - 3x = 0 & | + 3x \\ & -6 = 3x & | : 3 \\ & -2 = x & * \end{array}$$

$*$ in II: $-8-2-2y=0 \quad |+2y$

$-10 = 2y \quad |:2$

$-5 = y$

Kandidat: $(-2,-5)$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \qquad H(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\Delta(x,y) = (-2)(-2) - 1 \cdot 1 = 3$

$\Delta(-2,-5) = 3$

$\Delta(-2,-5) > 0$

$f_{xx}(-2,-5) = -2 < 0 \Rightarrow$ Max

Die Fkt. besitzt bei $(-2,-5)$ ein Max.

Bp: $z = f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$

$f_{x_1} = (3x_1^2 - 3) \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} = 0 \quad \text{I}$

$f_{x_2} = -2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{II}$

$f_{x_3} = x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \quad \text{III}$

Aus I: $3x_1^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1^2 = 1$

$x_{11} = 1$ oder $x_{12} = -1$

Aus II, III: II $-2x_2 + x_3 = 0$

III $x_2 - 2x_3 + 3 = 0$

$$II + 2\cdot III: \quad -3x_3 + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x_3 = 2$$

$$x_3 = 2 \text{ in } II: \quad -2x_2 + 2 = 0$$
$$-2x_2 = -2 \quad |:-2$$
$$x_2 = 1$$

Kandidaten: $\quad x_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$f_{x_1x_1} = \underbrace{6x_1}_{u'} \cdot \underbrace{e^{x_1^3 - 3x_1}}_{v} + \underbrace{(3x_1^2-3)}_{u} \cdot \underbrace{(3x_1^2-3)\cdot e^{x_1^3-3x_1}}_{v'}$$

Produktregel

$$f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1} = 0 \qquad f_{x_2x_3} = f_{x_3x_2} = 1$$
$$f_{x_1x_3} = f_{x_3x_1} = 0$$
$$f_{x_2x_2} = -2$$
$$f_{x_3x_3} = -2$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Berechnen $H_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $H_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $H_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

H_3: $\Downarrow$ Entw. nach 1. Zeile

$$6e^{-2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$= 6e^{-2}\cdot 3$$

$$= 18e^{-2} > 0$$

H_2: $\Downarrow$

$$\begin{vmatrix}6e^{-2} & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

$$-12e^{-2}-0$$

$$= -12e^{-2} < 0$$

H_1: $\Downarrow$

$$|6e^{-2}| > 0$$

$H_3 > 0$ $\quad$ $H_2 < 0$ $\quad$ $H_1 > 0$

Folgerung: über die Art des Extremwertes bei $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ kann nichts gesagt werden

$$H_3\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}-6e^2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

Entw. nach Zeile 1

$\Rightarrow -6e^2(4-1)$

$\Rightarrow -18e^2 < 0$

$$H_2\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}-6e^2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} = 12e^2 - 0 = 12e^2 > 0$$

$$H_1\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = -6e^2 < 0$$

$H_1 < 0$ $\quad$ $H_2 > 0$ $\quad$ $H_3 < 0$

Folgerung: bei $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ besitzt die Funktion ein lokales Maximum

Linearisierung von Funktionen

Annäherungsweise Berechnung von Funktionswerten bzw. Änderung von Funktionswerten durch lineare Ersatzfunktionen

führt auf den Begriff:

Das totale Differential

Geometrische Vorbetrachtungen

$y = f(x)$ Tangente y' Steigung

$z = f(x,y)$ Tangentialebene 2 Steigungen f_x f_y

Bestimmung der Gleichung der Tangentialebene von $z = f(x,y)$

allg. Gleichung : $z = ax + by + c$

Im Berührpunkt (x_0, y_0) gilt:

$f_x(x_0,y_0) = a$

$f_y(x_0,y_0) = b$ *

Berührpunkt $P(x_0, y_0, z_0)$ liegt auf der Fläche und auf Tangentialebene

$$z_0 = ax_0 + by_0 + c$$

$$\Rightarrow \quad c = z_0 - ax_0 - by_0$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \quad c = z_0 - f_x(x_0,y)\cdot x_0 - f_y(x_0,y_0)\cdot y_0$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$z = f_x(x_0,y_0)\cdot x + f_y(x_0,y_0)\cdot y + z_0 - f_x(x_0,y_0)\cdot x_0 - f_y(x_0,y_0)\cdot y_0$$

Umformen: $$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\left(x - x_0\right) + f_y(x_0,y)(y-y_0)$$

allg. Gleichung der Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0, z_0)

Def: Das totale Differential

$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$ heißt das totale Differential

linearer Differentialausdruck

der Funktion $z = f(x,y)$

$$dz = f_{x_1}\,dx_1 + f_{x_2}\,dx_2 + \dots + f_{x_n}\,dx_n$$

heißt das totale Differential von

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

Bp: $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ $\qquad f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

totale Differential

Geg. $P(2,1)$ in der (x,y)-Ebene

$P(2,1) \rightarrow P_1(2{,}5\,;\,1.75)$

$dx = 0.5 \qquad dy = 0.75$

$$dz = \frac{2\cdot 2}{2^2+1^2}\cdot 0.5 + \frac{2\cdot 1}{2^2+1^2}\cdot 0.75$$

$$= 0.4 + 0.3 = 0.7$$

angenäherte Differenz über tot. Diff.

Zum Vergleich:

$$\Delta z = \left| f(2,1) - f(2{,}5\,;\,1.75) \right|$$

$$= \left| \ln(4+1) - \ln(2{,}5^2 + 1.75^2) \right|$$

$$= \left| \ln(5) - \ln(9{,}312) \right|$$

$$= 0.62$$

wahre Fktwert änderung