Vorlesung Mathematik 2

24. 6. 2019

Prinzip von Lagrange (1736–1813)

$z = f(x,y)$ $\qquad g(x,y) = 0$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

Extremwerte von $L(x,y,\lambda)$

notw.: $L_x(x,y,\lambda) = 0$
$L_y(x,y,\lambda) = 0$
$L_\lambda(x,y,\lambda) = 0$

Achtung: $L_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y)$
Die Lagrangefkt abgeleitet nach λ ergibt die Nebenbedingung!

Die Lagrangefunktion mit n Variablen und k Neb.bed.

$$L(\underbrace{x_1, \ldots x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_k}_{\boxed{n + k \text{ Variablen}}}) = f(x_1, \ldots x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, g_j(x_1, \ldots x_n)$$

Bp.: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2} y^2 + 4 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^2$

$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$

$$L(x,y,\lambda) = -x^2 - \frac{1}{2} y^2 + 4 + \lambda(2 - 2x - y)$$
$$+ 2\lambda - 2\lambda x - \lambda y$$

notw. Bed.: $L_x(x,y,\lambda)=0$

$L_y(x,y,\lambda)=0$

$L_\lambda(x,y,\lambda)=0 \iff g(x,y)=0$

I $L_x = -2x - 2\lambda = 0$ Aus I: $2\lambda = -2x \Rightarrow \lambda = -x$

II $L_y = -y - \lambda = 0$ Aus II: $\lambda = -y \Rightarrow \lambda = -y$

III $L_\lambda = 2 - 2x - y = 0$

$$\underbrace{}_{\Rightarrow x = y \; *}$$

$*$ in 3: $2 - 2x - x = 0$

$2 = 3x \iff x = \frac{2}{3} \underset{*}{\Rightarrow} y = \frac{2}{3}$

Die Fkt. hat bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ein lokales Maximum (s. Berechnung mittels Substitution)

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$L(x,y,\lambda) - f(x,y) = \lambda g(x,y) \quad | : g(x,y)$$

(unendlich kleine Differenz)

$$\frac{L(x,y,\lambda) - f(x,y)}{g(x,y)} = \lambda$$

$g(x,y)$ nahe bei Null

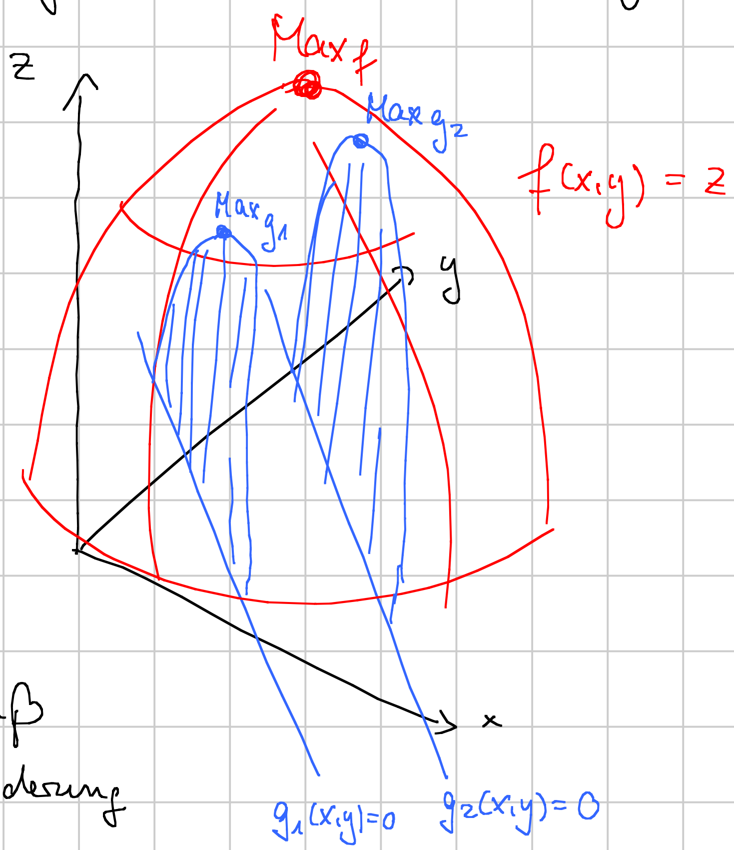
λ Differentialquotient der Fkt. L nach der Fkt. g

$$\lambda = \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial g}$$

λ infinitesimale Änderungsrate der Fkt. L bei Variation der Nebenbedingung g

λ heißt die marginale Änderungsrate der Fkt. f relativ zur Nebenbedingung g

Gegenstand der Marginalanalyse



λ ist ein Maß für Lageänderung des Maximums, wenn $g_1 \to g_2$ verschoben wird

Bp.: Folgendes „Dosenproblem" ist mit der Lagrange-Methode zu lösen:

oben offene Dosen, mit Radius r und Höhe h

V = 1 Liter, Oberfläche soll minimal werden

Zielfkt: $O_b(r,h) = 2\pi r \cdot h + \pi r^2$

hier: Boden + Mantel

NB : $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1$ Liter

$$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$$

$$L(r,h,\lambda) = 2\pi r \cdot h + \pi r^2 + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$$

$$\text{I} \quad L_r = 2\pi h + 2\pi r + 2\lambda\pi r h = 0$$

$$\text{II} \quad L_h = 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0$$

$$\text{III} \quad L_\lambda = \pi r^2 h - 1000 = 0$$

Achtung: Neb. bed.

$$\text{I} - \text{II}: \quad 2\pi h + 2\lambda\pi r h - \lambda\pi r^2 = 0$$

$$\pi(2h + 2\lambda r h - \lambda r^2) = 0$$

$$2h + 2\lambda r h - \lambda r^2 = 0$$

Aus II: $\lambda\pi r^2 = -2\pi r \quad | : \pi r^2$

$$\lambda = -\frac{2\pi r}{\pi r^2} = -\frac{2}{r} \quad *$$

Aus I mit $*$: $2\pi h + 2\pi r + 2 \cdot -\frac{2}{r} \cdot \pi \cdot r \cdot h = 0$

$$2\pi r + h(2\pi - 4\pi) = 0$$

$$2\pi r = 2\pi h$$

$$\Rightarrow r = h \quad **$$

Aus III mit $**$: $\pi \cdot r^2 \cdot r - 1000 = 0$

$$r^3 = \frac{1000}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = h$$

Abmessungen: $h = r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 6.8281 \text{ cm}$

Bp: Eingangsproblem:

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{Abstand von } z\text{-Achse}$$
$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$
$$g_2(x,y,z) = x+y+z = 0$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \sqrt{x^2+y^2} + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(x+y+z)$$

$$L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \qquad \text{I}$$
$$L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad \text{II}$$
$$L_z = 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad \text{III}$$
$$L_{\lambda_1} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \qquad \text{IV}$$
$$L_{\lambda_2} = x+y+z = 0 \qquad \text{V}$$

Aus I: $\lambda_2 = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 x\right)$

Aus II: $\lambda_2 = -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y\right)$

Also: $x = y$ oder $\lambda_2 = 0$

Fall $x=y$:

$\Downarrow$ eingesetzt in Gl. V

$x + x + z = 0$

$\Rightarrow z = -2x$

$\Downarrow$ eingesetzt in Gl. IV

$x^2 + x^2 + 4x^2 = 1$

$6x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{6}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

Fall $\lambda_2 = 0$:

$\Downarrow$ aus Gl. III

$2\lambda_1 \cdot z = 0$

$\swarrow$ $\searrow$

$z = 0$ | $\lambda_1 = 0$

$z=0$: $\Downarrow$ Gl. V

$x = -y$

$\Downarrow$ Gl. IV

$x^2 + x^2 = 1$

$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\otimes$

$\lambda_1 = 0$: $\Downarrow$ aus I + II

$x = y = 0$

$\Downarrow$ V

$z = 0$

$\Downarrow$ zu IV

also $\lambda_1 = 0$ trifft nicht ein

Damit zwei Kandidaten

$P_1\left(\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$ $\quad$ $\boxed{P_1\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)}$

$$\boxed{P_2\left(-\tfrac{1}{6}\sqrt{6}, -\tfrac{1}{6}\sqrt{6}, \tfrac{1}{3}\sqrt{6}\right)}$$

aus (*)

$$\boxed{\begin{array}{l} P_3\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right) \\ P_4\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right) \end{array}}$$

Abstände für $P_1 - P_4$ berechnen:

$$f(P_1) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot 6 + \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot 6} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$f(P_2) = \sqrt{\tfrac{1}{36} \cdot 6 + \tfrac{1}{36} \cdot 6} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$f(P_3) = \sqrt{\tfrac{1}{4} \cdot 2 + \tfrac{1}{4} \cdot 2} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(P_4) = \sqrt{\tfrac{1}{4} \cdot 2 + \tfrac{1}{4} \cdot 2} = \sqrt{1} = 1$$

P_1 und P_2 haben den kürzesten Abstand
P_3 und P_4 " " größten " } von der z-Achse

Allgemeine hinreichende Bedingungen für Minimum bzw. Maximum am Bp. einer Fkt. mit n Variablen und einer Nebenbedingung:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

Sei x^* Kandidat, d.h. $L_{x_1} = L_{x_2} = \dots L_{x_n} = L_\lambda = 0$

x^* ist lokales Maximum, falls

$$G_2 > 0, \; G_3 < 0, \; \dots \; G_n \begin{cases} > 0 & n \text{ gerade} \\ < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

x^* ist lokales Minimum, falls

$$G_2 < 0 \, , \; G_3 < 0 \, , \; \dots \; G_n < 0$$

mit $$G_2 = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & g_{x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$G_n = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & \dots & L_{x_1x_n} & \overset{L_{\lambda x_1}}{g_{x_1}} \\ L_{x_2x_1} & & L_{x_2x_n} & g_{x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{x_nx_1} & & & \overset{L_{\lambda x_n}}{g_{x_n}} \\ g_{x_1} & \dots & g_{x_n} & 0 \end{vmatrix}$$

Determinanten der partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion