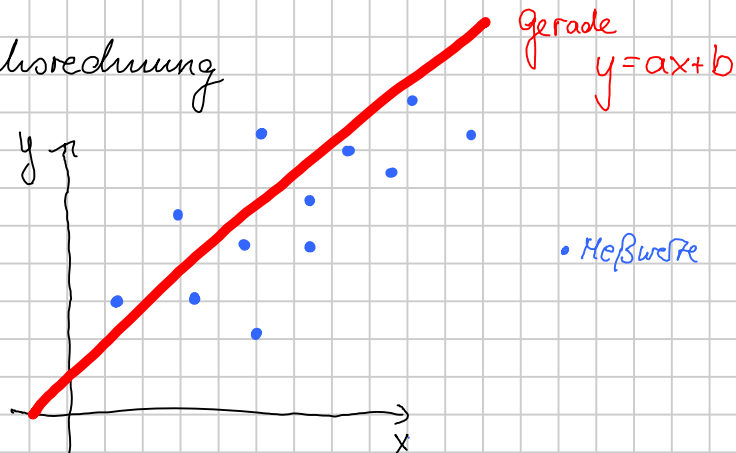


Vorlesung Mathematik 2

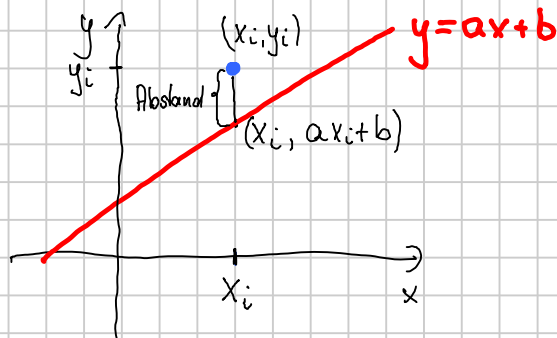
26.6.2019

Weitere Anwendung: Ausgleichsrechnung

hier: lineare Anpassung



Die Methode der kleinsten Quadrate nach C.F. Gauß



Abstand vom Meßpunkt: $(y_i - (ax_i + b))$

Abstandsquadrat $(y_i - (ax_i + b))^2$

damit positive und negative Abweichungen gleich "gewichtet" werden

Geg: n Messungen (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$ Ziel: Ausgleichsgerade $y = \underline{a}x + \underline{b}$

optimale Annäherung an die Meßwerte

Summe der Abstandsquadrate $\sum_{i=1}^n$

$$Q(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

Variablen

$\downarrow$ Binom. Formel

$$= \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2y_i(ax_i + b) + (ax_i + b)^2]$$

Um ein Minimum zu bestimmen, bildet man zunächst:

$$Q_a(a, b) = 0$$

$$Q_b(a, b) = 0$$

hier nur: $Q_a(a, b) = \sum_{i=1}^n -2y_i x_i + 2(ax_i + b) \cdot x_i = 0$

$\Downarrow$

$$y = ax + b$$

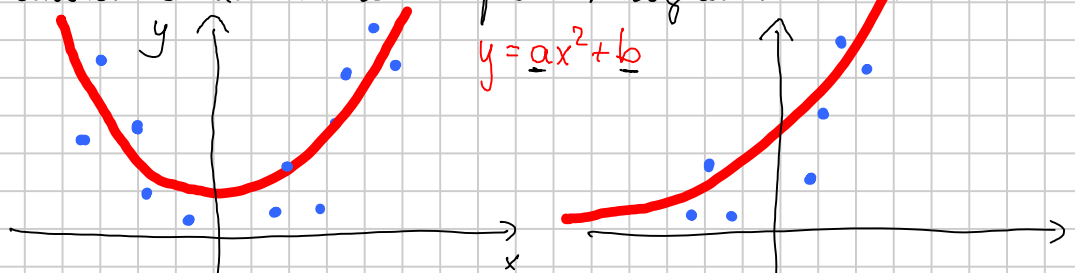
Regressionsgerade

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

$\bar{x}, \bar{y}$ arith. Mittelwerte
der Meßwerte

Methode der kleinsten Quadrate auch für "Ausgleichskurven"



$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + b)]^2$$

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - b \cdot e^{ax_i}]^2$$

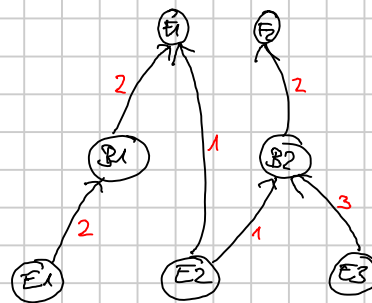
Zusammenhang über eine quadratische Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$

$$Q(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$$

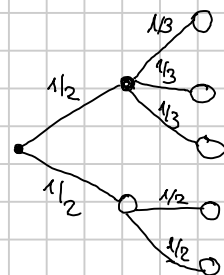
3 Variablen

Graphentheorie

Bekannt Graphen
Grafendiagramm



In der Wahrscheinlichkeitsrechnung



Bäume und Graphen

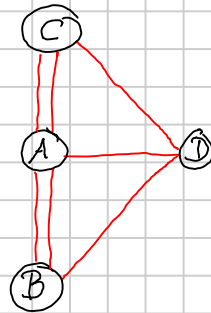
Huffman - Code

z.B. Mississippi

Beginn : Leonard Euler 1736

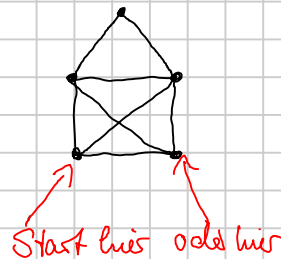
Brückenproblem

Frage von Euler: Kann ich in einem einzigen Rundgang alle Stadtteile erreichen und dabei jede Brücke nur einmal überqueren?



Graph des
Euler'schen
Brückenproblems

Brückenproblem auch beim "Haus vom Nikolaus"



Def: $G = (M, K, v)$

M Menge von Knoten

K Menge von Kanten

v Abbildung, die zwei Knoten eine Kante zuordnet

adjazente Knoten: sind durch eine Kante verbunden

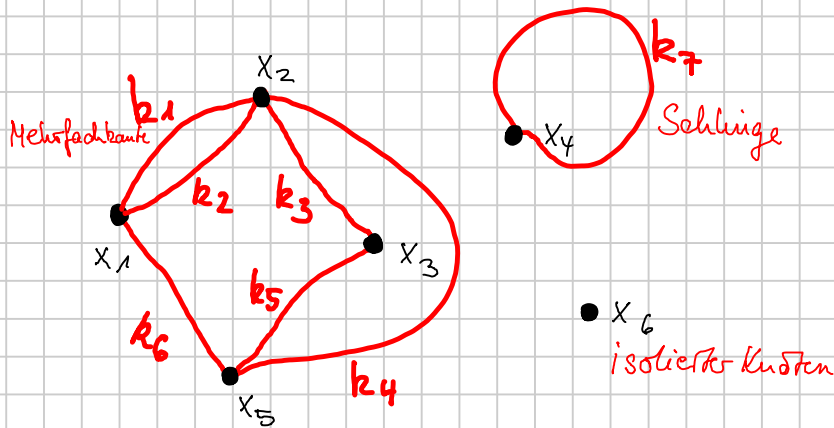
insidente Kante ist die Kante, die mit einem Knoten verbunden ist

Bp: $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$

$v(k_1) = \{x_1, x_2\}$ $v(k_3) = \{x_2, x_3\}$ $v(k_5) = \{x_3, x_5\}$

$v(k_2) = \{x_1, x_2\}$ $v(k_4) = \{x_2, x_5\}$ $v(k_6) = \{x_1, x_5\}$

$v(k_7) = \{x_4, x_4\}$



$d(x_1) = 3$
 $d(x_2) = 4$
 $d(x_3) = 2$
 $d(x_4) = 2$
 $d(x_5) = 3$
 $d(x_6) = 0$

ungerichteter Graph

dagegen: gerichteter Graph (Digraph)



Knotengrad:

Die Anzahl der mit einem Knoten x_i inzidenten Kanten $d(x_i)$

Dabei zählen Schleifen doppelt

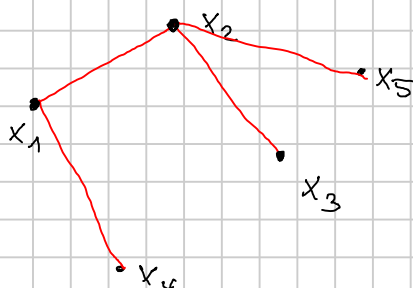
Ein Graph heißt schlicht, wenn er weder Schleifen noch Mehrfachkanten enthält

Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn je zwei (nicht unbedingt benachbart) Knoten durch eine Kantenfolge verbunden sind.

Matrizendarstellung von Graphen

1) Adjazenzmatrix schlichter
geg. ungerichteter Graph mit n Knoten

A Matrix mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{x_i, x_j\} \text{ Kante} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$d(x_1) = 2$
 $d(x_2) = 3$
 A :
 symmetrisch

