

Vorlesung Mathematik 2

1.7.2019

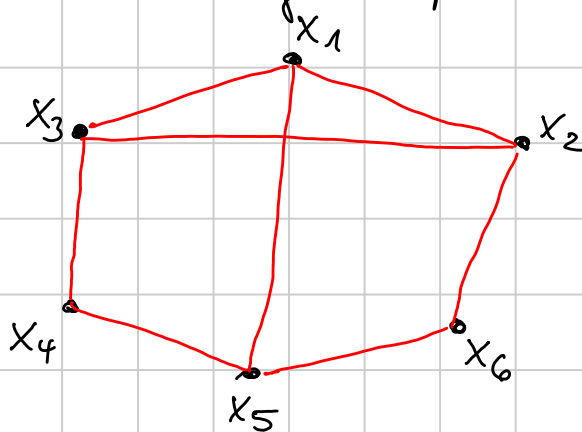
Weitere Graphentheorie

Def. (Zusammenhängender Graph)

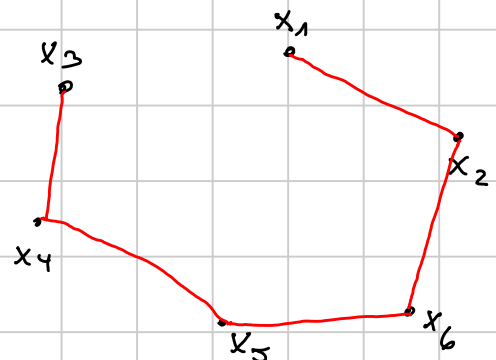
Ein gewöhnlicher Graph (ungerichteter Graph) heißt zusammenhängend, wenn zu je zwei Knoten eine Kantenfolge existiert.

Wenn jeder Knoten mit jedem anderen Knoten direkt über eine Kante verbunden ist, dann heißt der Graph vollständig.

Zusammenhangskomponente von x_2 :

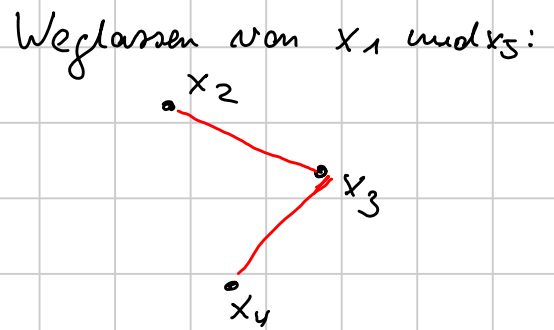
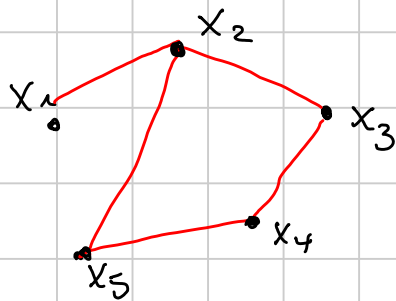


$\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

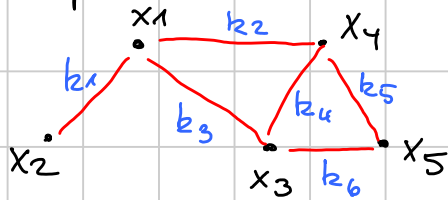


Def: (Untergraph)

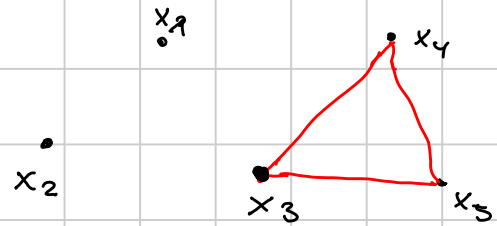
erhält man durch Entfernung von Knoten und alle mit diesem Knoten inzidenten Kanten



Teilgraph

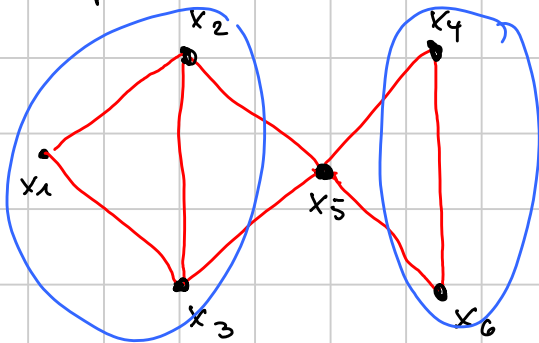


durch Weglassen von Kanten
z.B. k_1 und k_2, k_3

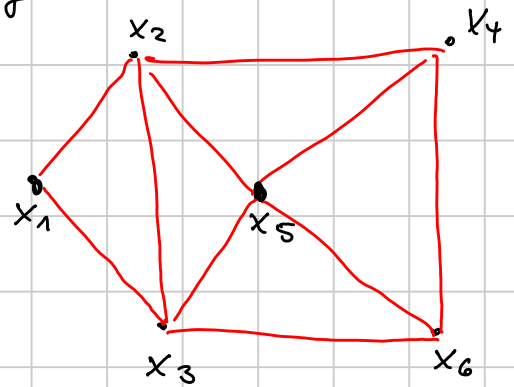


Def: Artikulationspunkte (= trennende Knoten)

Nach Herausnahme dieses Knotens + inz. Kanten
"zerfällt" der Zusammenhang



x_5 Artikulationspunkt



kein Artikulationspunkt

Def: Kantenfolge

Def: Eulersche Linie, Eulerzug

Ein Kantenzug, der jede Kante eines Graphen
genau einmal enthält.

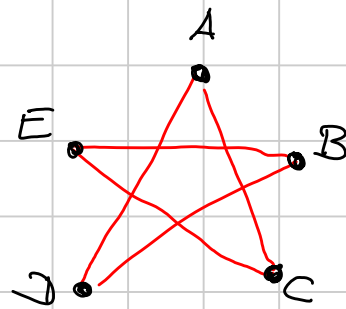
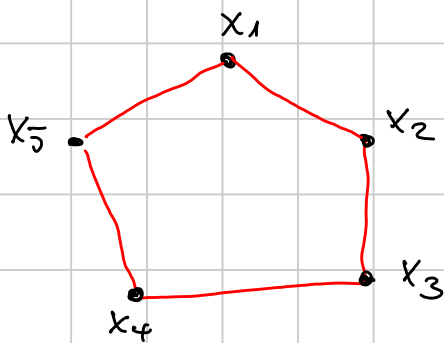
Def: Hamiltonsche Linie

Ein Weg, der jeden Knoten eines Graphen nur einmal besucht

Bem: Eine Eulersche Linie ex. nur, wenn der Grad von höchstens zwei Knoten ungerade ist.

Isomorphie bei Graphen

Bp: (aus Skript von Herrn Koenen)

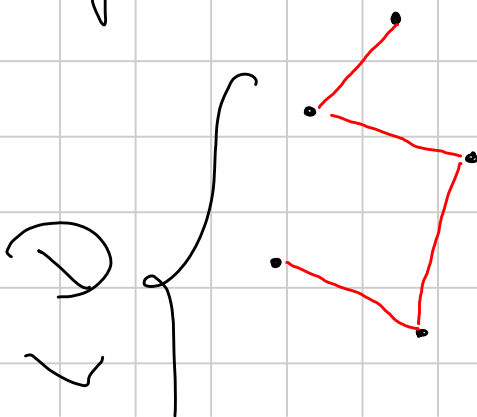


Isomorphismus
(bijektive Abb.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\varphi(x_i)$	A	D	B	E	C

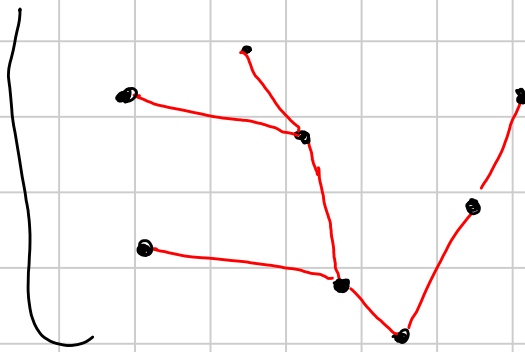
Def: Bäume und Wälder

Def. Baum



Je zwei Knoten sind durch genau einen Weg verbunden
zyklenfrei

W



Satz: Ein Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten

Beweis: (vollständige Induktion)

Ind. auf. Beh. gilt für $n=1$ bzw. hier $n=2$ ✓

Ind. vor: Die Beh. gilt für ein $n=k$
(Baum mit k Knoten hat $k-1$ Kanten)

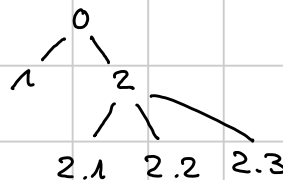
Ind. schritt: $k \rightarrow k+1$

Aus dem Baum mit k Knoten wird durch Hinzufügen eines Knotens (verbinden über 1 Kante) ein Baum mit $k+1$ Knoten und $k-1+1 = k$ Kanten

Ind. schluss: Die Beh. gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Wo findet man Bäume?

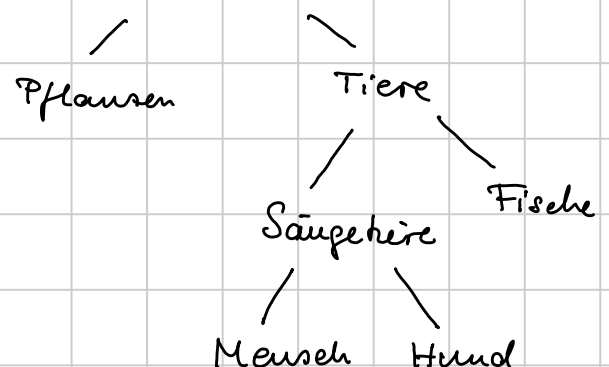
Datenstrukturen



Biologie

Stammbäume

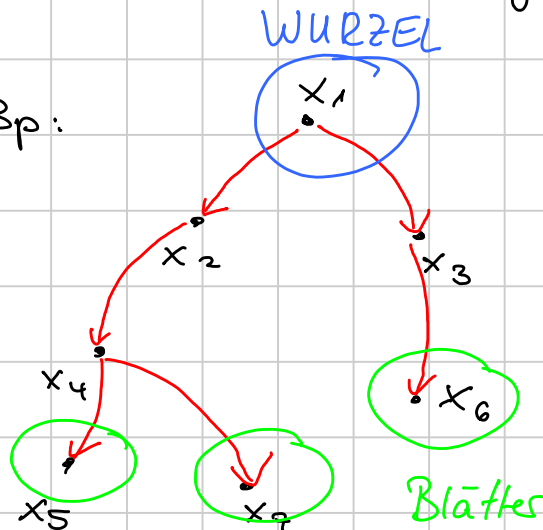
Lebewesen



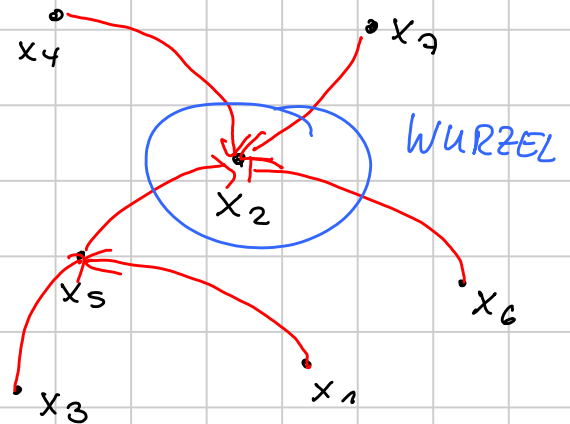
Von besonderer Bedeutung: Wurzelbäume

gerichtete Graph: Digraph

Bp:

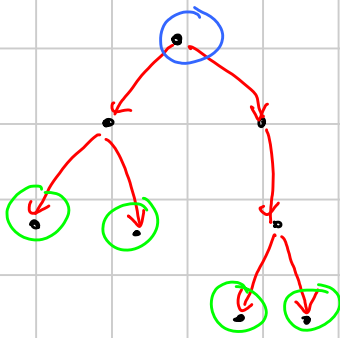


Out-Tree



In-Tree

Höhe eines Baumes = größte Länge eines Weges von Wurzel zu Blatt



hier: 3

alternativ: die Anzahl der Knoten im längsten Weg

Binärbäume

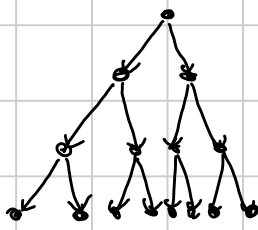
hier: 4

Wurzelbäume mit: jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger

Ein vollständiger Binärbaum besteht aus Knoten, die immer zwei Nachfolger haben

Anzahl der Knoten in einem vollst. Binärbaum der Höhe H

H : Anzahl der Knoten im längsten Weg



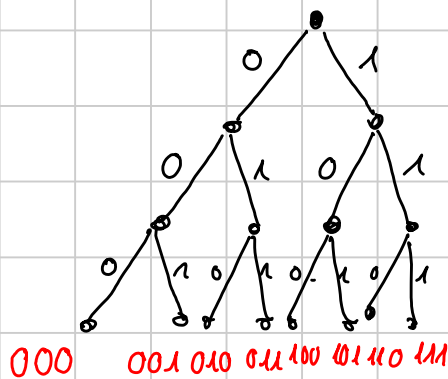
$H=4$

Anzahl der Knoten im Graphen:

$$\sum_{i=0}^{H-1} 2^i = 2^H - 1$$

$$\text{Im Bp: } \sum_{i=0}^3 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \\ = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

Bp: Aussagenlogik



Wichtige Anwendungen : 1) BST Binäre Suchbäume
2) Codierung : Huffman-Code

Präfix-Code

Kein Codewort ist Präfix eines anderen Codes

0 10 11 Präfixfreies Code

0 01 10 kein präfixfreies Code

Huffman-Code

Wurzelbaum zur Darstellung des Codes

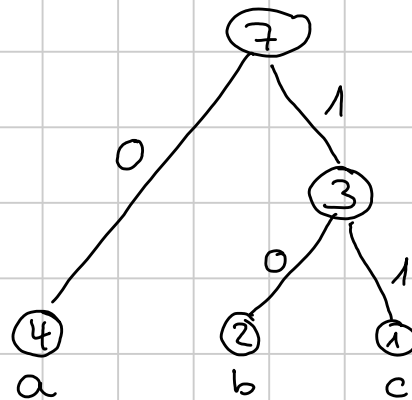
Aufbau:

1) Ermittlung der relativen Häufigkeit der Zeichen in einem Text

Bp: abacaba

a	b	c
4	2	1

1. Schritt Zusammenfassen der am wenig häufig vorkommenden Buchstaben



Code: 0 10 11

Aufgabe: Dekodieren Sie

0111000110011

a c b a a c a a c