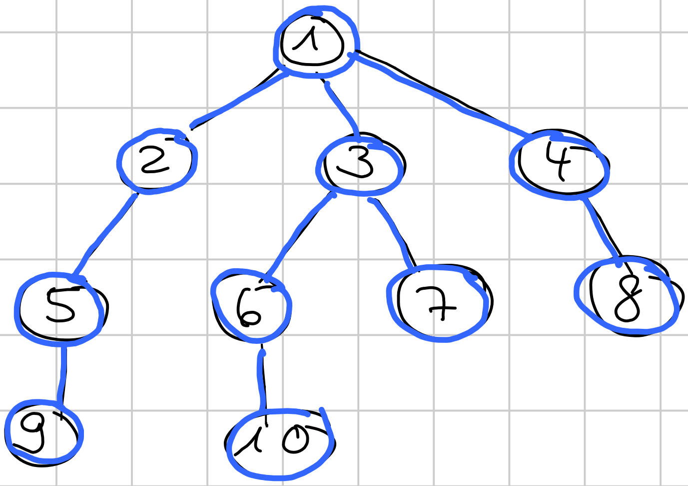
Vorlesung Mathematik

8.7.2019

Durchlaufen von Graphen

1) Tiefensuche (am 3.7.)

2) Breitensuche



Erinnerung: Bewerteter Graph

Def: MST Minimal aufspannender Baum

Im Prinzip: Gerüst eines bewerteten Graphen

Die Summe der Kantenbewertungen ist minimal

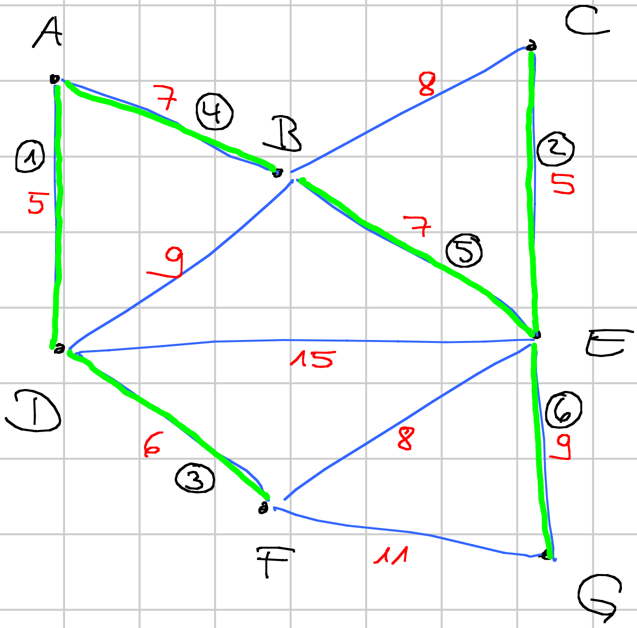
Aufsuchen von minimal aufspannenden Bäumen in ungerichteten bewerteten Graphen

Algorithmus von Kruskal (greedy-Algorithmus)

(Joseph Kruskal 1956)

1) Suche in G (bewertet) die Kante mit dem kleinsten Gewicht, falls diese einen Kreis bildet → verwerfen
sonst: hinzufügen
1) solange wiederholen, bis nichts mehr geht

Bp



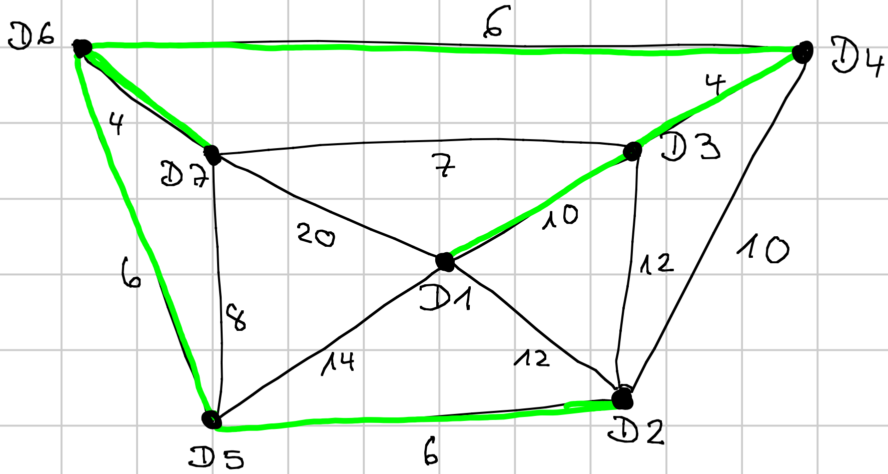
(x) Schritte hier (1) – (6)

alternativ Kante CE

Bp: Sieben Dörfer sollen durch Straßen verbunden werden, Kosten unterschiedlich, aus folgender Matrix zu entnehmen

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
D1	0	12	10	0	14	0	20
D2	12	0	12	10	6	0	0
D3	10	12	0	4	0	0	7
D4	0	10	4	0	0	6	0
D5	14	6	0	0	0	6	8

D6	0	0	0	6	6	0	4
D7	20	0	7	0	8	4	0



Durchlaufen von Graphen

Bestimmen kürzester (bzw. längster Wege) in Graphen

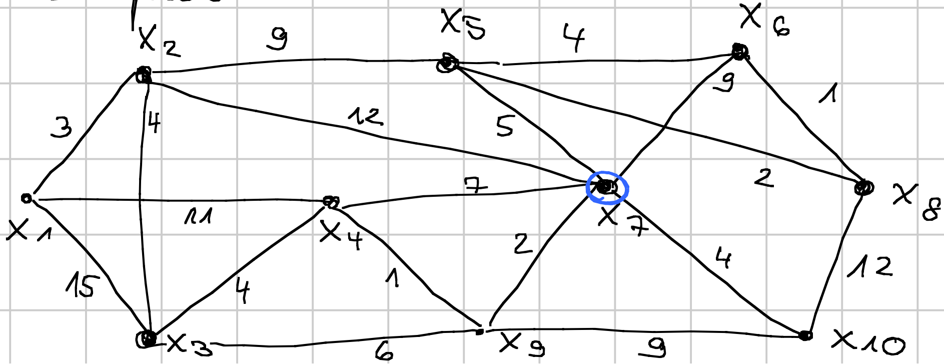
kürzester Weg von einem Knoten zu allen übrigen Knoten
(single source shortest paths)

kürzester Weg zwischen je zwei Knoten
(all pairs shortest paths)

auch möglich: kürzeste Wege in Digraphen

Markierungsalgorithmus nach Dijkstra (1930-2002)
hier: single source shortest paths

an einem Beispiel:



Ziel: kürzesten Wege von X_7 zu allen anderen Knoten

Schritt 1 : $D(x_7) = 0$ $M_1 = \{x_7\}$ D Bewertung

Iteration 1: $M^* = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}\}$
die Menge der zu x_7 benachbarten Knoten

Ermitteln der Entfernungen

x_s	x_2	x_4	x_5	x_6	x_9	x_{10}
$D^*(x_s)$	12	7	5	9	2	4

Setze $D(x_s) = \min D^*(x_s)$ hier $D(x_9)$

$$D(x_9) = 2$$

Markiere Kante (x_7, x_9)

$$M_2 = M_1 \cup \{x_9\} = \{x_7, x_9\}$$

Iteration
Ermittlung der Menge der zu x_7 und x_9 benachbarten Knoten : $M^* = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{10}\}$

Ermittlung der Entfernungen $D(x_s)$, $x_s \in M^*$
direkt von x_7 oder über x_9

x_s	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	12	8 2+6	3 (alternativ direkt, ist aber länger)	5	9	4

$D(x_4) = 3$
Markiere die Kante (x_9, x_4)

$$M_3 = M_2 \cup \{x_4\} = \{x_7, x_9, x_4\}$$

Iteration 3

Ermitteln der zu x_7, x_9, x_4 benachbarten Knoten

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_{10}\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	4
	2+1+11					

$$D(x_{10}) = 4$$

Markieren der Kante (x_7, x_{10})

$$M_4 = M_3 \cup \{x_{10}\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}\}$$

Iteration 4

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	16

$$D(x_5) = 5$$

Markiere (x_7, x_5)

$$M_5 = M_4 \cup \{x_5\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5\}$$

Iteration 5

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	6	9	7

$D(x_3) = 6$

Markiere (x_3, x_4)

$M_6 = M_5 \cup \{x_3\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5, x_3\}$

Iteration 6

$M^* = \{x_1, x_2, x_6, x_8\}$

x_s	x_1	x_2	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	10	9	7
		2+1+3+4		

$D(x_8) = 7$ Markiere (x_5, x_8)

$M_7 = M_6 \cup \{x_8\} = \{x_3, x_4, x_5, x_7, x_9, x_8, x_{10}\}$

Iteration 7 $M^* = \{x_1, x_2, x_6\}$

x_s	x_1	x_2	x_6
$D^*(x_s)$	14	10	8

$D(x_6) = 8$ Markiere (x_6, x_8)

$M_8 = M_7 \cup \{x_6\}$

Iteration 8 $M^* = \{x_1, x_2\}$

x_s	x_1	x_2
$D^*(x_s)$	14	10

$D(x_2) = 10$ Markiere Kante (x_3, x_2)

$M_9 = M_8 \cup \{x_2\}$

Iteration 9 : $M^* = \{x_1\}$

	x_s	x_1
$D^*(x_s)$		$\underline{13}$

$D(x_1) = 13$ Mark. (x_1, x_1)

$D(x_1) = 13$ (It. 9)
$D(x_2) = 10$ (It. 8)
$D(x_3) = 6$ (It. 5)
$D(x_4) = 3$ (It. 2)
$D(x_5) = 5$ (It. 4)
$D(x_6) = 8$ (It. 7)
$D(x_7) = 0$ Start
$D(x_8) = 7$ (It. 6)
$D(x_9) = 2$ (It. 1)
$D(x_{10}) = 4$ (It. 3)

Hinweis auf Maximalflußproblem

Flüsse und Schnitte in Netzwerken