

Letzte Vorlesung Mathematik 2

10.7.2019

Überblick über die Themen des SS 2019

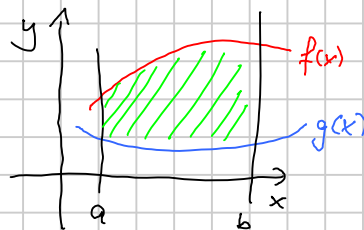
Integrale

unbestimmte Integral $\int f(x) dx = F(x) + C \quad C \in \mathbb{R}$

bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$\sum \xrightarrow{\text{Grenzwert}} \int$$

Flächenberechnung

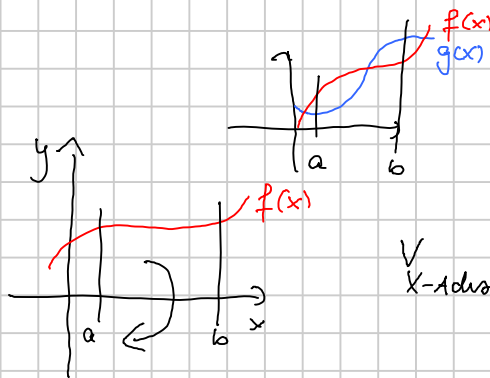


$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = A$$

Achtung: Aufpassen, falls $f(x) > 0$
 $g(x) < 0$
auf $[a, b]$

bzw. ex. Schnittpunkte auf $[a, b]$
von $f(x)$ und $g(x)$

Rotationsvolumen



$$V_{\text{K-Ähnl.}} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$

Integrationsregeln: 1) Produktintegration
= Partielle Integration

Bp. $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx$

$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\begin{aligned} &= \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{(x-2)^{-\frac{1}{2}}} dx && \begin{aligned} u' &= 1 \\ v' &= (x-2)^{-\frac{1}{2}} \\ v &= (x-2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \end{aligned} \\ &= 2x(x-2)^{\frac{1}{2}} - 2 \int (x-2)^{\frac{1}{2}} dx && \begin{aligned} (x-2)^{\frac{1}{2}} \\ \downarrow \text{Auflösen} \\ (x-2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned} \\ &= 2x\sqrt{x-2} - \frac{4}{3}\sqrt{x-2}^3 + C \end{aligned}$$

2) Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(z) dz \quad z = g(x)$$

Bp: $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx$ $z = x^3 + 3x$ $\frac{dz}{dx} = z' = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1)$

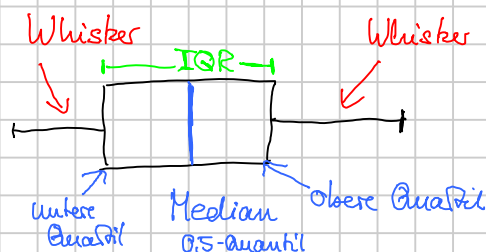
$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{z} dz = \frac{1}{3} \ln|z| = \frac{1}{3} \ln|x^3+3x| + C$$

Rücksubst.

Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Zunächst: Statistik

Boxplot



Kombinationen ohne Wdh:

Auswahl von p Objekten aus n Objekten

(6 Kugeln beim Lotto aus 49 Kugeln)

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{Binomialkoeffizient}$$

2 wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1) Binomialverteilung

Bp: 99% fehlerfrei beim Tippen einer Seite

Frage: W, dass in einem Buch von 225 Seiten höchstens 3 fehlerhaft sind.

$p = 0.01$
 $q = 0.99$
 $n = 225$

diskrete Verteilung

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \binom{225}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{225} + \binom{225}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^{224} + \binom{225}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{223} + \binom{225}{3} \cdot 0.01^3 \cdot 0.99^{222}$$

$$= 0.81017$$

$$E(X) = n \cdot p$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

stetige Verteilung

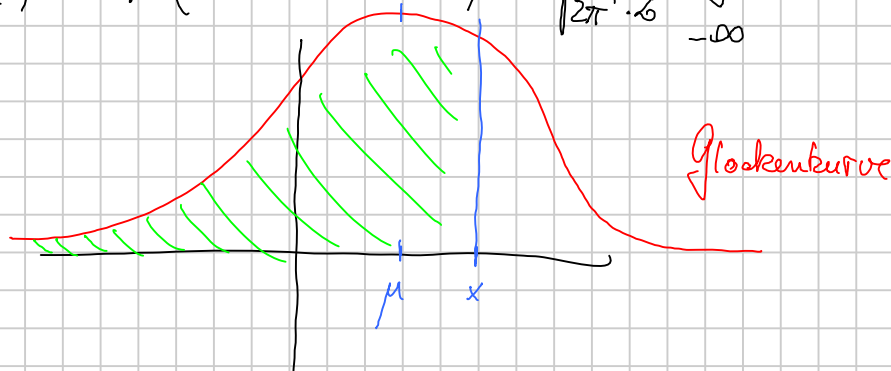
Gauß'sche Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

μ Mittelwert

σ Standardabw.

$$F(x) = P(-\infty < t \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



Jede Normalverteilung mit μ und σ
wird durch $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ zu einer Normalverf. mit $\mu=0$
 $\sigma=1$

$N(0,1)$ Verteilung Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Bp: $\mu = 248 \text{ g}$ $\sigma = 4 \text{ g}$ normalverteilt

W, dafür dass ein Töleranzbereich von 245g bis 255g eingehalten wird?

$$P(245 \leq X \leq 255)$$

$$= \Phi\left(\frac{255-248}{4}\right) - \Phi\left(\frac{245-248}{4}\right)$$

$$= \Phi(1.75) - \underbrace{\Phi(-0.75)}_{(1 - \Phi(0.75))}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.9599 - (1 - 0.7734) \\
 &= 0.7333
 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{aus Tabelle}}$ $\xrightarrow{\text{aus Tabelle}}$

Auch wichtig: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die komplexen Zahlen

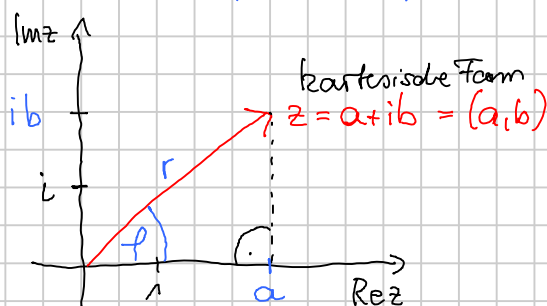
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z = a + ib$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Rez Im z

$$i = \sqrt{-1}$$

$\uparrow$
imaginäre Einheit



$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

Achtung auf Quadranten achten

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Exponentialform

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

trigon. Form

$$z = i = 0 + 1i$$

$$\varphi = 90^\circ$$

$$|z| = 1$$

$$0 + 1i = e^{i90^\circ}$$

Berechnen von Wurzeln

$$\sqrt[n]{z}$$

$$z = a + ib$$

$$\sqrt[n]{i}$$

Betrag $|z|$

Winkel φ

auf Quadranten achten

$$z_0 = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 0 \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)}$$

$$z_1 = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 1 \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)}$$

$$z_2 = \dots \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)}$$

$$z_3 = \vdots \quad \vdots$$

$$z_4 = \vdots \quad \vdots$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

DGL

Gleichung mit unbekannter Fkt. und deren Ableitungen

Wichtig Linear DGL 2. Ord. mit konst. Koeff. homogen

char. Gl.
Ansatz $y = e^{\lambda x}$

Mehrdimensionale Analysis

Wichtig: partielle Abl. 1. Ordnung
höhere Ordnung
Gradient, Hesse-Matrix

Totales Differenzial

Extremwerte

Extremwerte m. Nebenbed. Lagrange Fkt

Graphentheorie