

## 11. Komplexe Zahlen

*Der kürzeste Weg zwischen zwei Wahrheiten  
im Reellen führt über das Komplexe.*

*[Jacques Hadamard, franz. Mathematiker, 1865-1963]*

Am Anfang stand – wie so oft bei wissenschaftlichen Entdeckungen – die Nichtlösbarkeit eines Problems. Die Nichtlösbarkeit bestimmter algebraischer Gleichung hatte schon vorher oft zur schrittweisen Erweiterung unseres Zahlbegriffs geführt:

|               |                                                         |                   |
|---------------|---------------------------------------------------------|-------------------|
| $x + 2 = 0$   | nicht lösbar in $\mathbf{N}$ , führt auf $\mathbf{Z}$ . | $x = -2$          |
| $5x - 3 = 0$  | nicht lösbar in $\mathbf{Z}$ , führt auf $\mathbf{Q}$ . | $x = 3/5$         |
| $x^2 - 2 = 0$ | nicht lösbar in $\mathbf{Q}$ , führt auf $\mathbf{R}$ . | $x = \pm\sqrt{2}$ |
| $x^2 + 1 = 0$ | nicht lösbar in $\mathbf{R}$ .                          | $x = ???$         |

Die komplexen Zahlen erlauben es, solche Gleichungen – und wie wir sehen werden auch alle algebraischen Gleichungen – zu lösen.

### 11.1. Definition und Darstellung komplexer Zahlen

Ausgehend von der Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  bzw.  $x^2 = -1$  führen wir formal die Lösungen  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$  ein.

#### Def D 11-1: imaginäre Einheit

Die imaginäre Einheit  $i$  wird durch  $i^2 = -1$  definiert.

Die Rechengesetze zum Wurzelziehen dürfen NICHT allgemein auf negative Zahlen übertragen werden: Beispiel zur Warnung:

FALSCH:  $-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \stackrel{???}{=} \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{????}$

RICHTIG: Mit  $i$  als Symbol rechnen, für das  $i^2 = -1$  gilt, NICHT durch  $\sqrt{-1}$  ersetzen.

Anmerkung: In der Elektrotechnik wählt man auch oft  $j$  als Bezeichner für die imaginäre Einheit, damit man nicht mit dem Symbol für den Strom ( $I$ ,  $i$ ) in Konflikt kommt.

#### Def D 11-2 imaginäre und komplexe Zahlen

Das Produkt  $ib = bi = b \cdot i$  einer reellen Zahl  $b$  mit der imaginären Einheit, heißt imaginäre Zahl.

i) Die Summe  $z$  einer reellen Zahl  $a$  und einer imaginären Zahl  $ib$  ist eine komplexe Zahl:

$$z = a + ib$$

$a$  heißt Realteil,  $b$  Imaginärteil von  $z$ :  $\operatorname{Re}(z) = a$ ,  $\operatorname{Im}(z) = b$ .

ii) Die komplexe Zahl  $z^* = a - ib$  heißt die zu  $z$  konjugiert-komplexe Zahl.

iii) Die Menge  $\mathbf{C} = \{z \mid z = a + ib; a, b \in \mathbf{R}\}$  heißt Menge der komplexen Zahlen.

Anm.: Die imaginäre Zahl  $z=ib$  löst die Gleichung  $z^2 = -b^2$ , denn  $(ib)(ib) = i^2 \cdot b^2 = -b^2$ .

Beispiele komplexer Zahlen:

$2 - 3i$ ,  $\sqrt[3]{5} - i\sqrt[7]{12}$ ,  $i\pi$ , jede reelle Zahl (s.u.).

### Def D 11-3 Rechnen mit komplexen Zahlen

Für komplexe Zahlen  $z_1=a_1+ib_1$  und  $z_2=a_2+ib_2$  gelten die folgenden Rechenoperationen:

- 1) Gleichheit:  $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$
- 2) Addition:  $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- 3) Multiplikation:  $z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$

Begründung in Vorlesung!

Für die komplexe Addition und Multiplikation gelten wie für die reellen Zahlen das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz (Beweis durch Nachrechnen!)

Mit komplexen Zahlen, deren Imaginärteil 0 ist, wird wie mit reellen Zahlen gerechnet:

$$(a_1 + i \cdot 0) + (a_2 + i \cdot 0) = (a_1 + a_2) + i \cdot 0$$

$$(a_1 + i \cdot 0) \cdot (a_2 + i \cdot 0) = (a_1 a_2) + i \cdot 0$$

Sie lassen sich daher mit den reellen Zahlen identifizieren; man lässt  $+i \cdot 0$  weg und schreibt kurz  $a$  statt  $a + i \cdot 0$ . In diesem Sinne ist  $\mathbf{R}$  eine Teilmenge von  $\mathbf{C}$ .

### Satz S 11-1 Betrag

- 1) Das Produkt einer komplexen Zahl  $z$  mit ihrer konjugierten-komplexen Zahl  $z^*$  ist rein reell:

$$z \cdot z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 + i(ab - ab) = a^2 + b^2$$

- 2) Die Wurzel aus diesem Produkt nennt man den **Betrag**  $|z|$  der komplexen Zahl:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Satz S 11-2 Subtraktion und Division komplexer Zahlen**

Für komplexe Zahlen  $Z_1 = a_1 + ib_1$  und  $Z_2 = a_2 + ib_2$  gilt:

1) Zwei komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem man ihre Real- und Imaginärteile subtrahiert:

$$Z = Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

2) Um durch komplexe Zahl  $Z_2 \neq 0$  zu dividieren, muss man den Bruch mit ihrer konjugiert-komplexen Zahl erweitern, damit der Nenner reell wird (kein  $i$  mehr enthält):

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_2^*}{Z_2 \cdot Z_2^*}$$

Beispiel  $\frac{1+2i}{1-i}$  wird in Vorlesung vorgerechnet.



**Übung:** Berechnen Sie

$$i(3-2i) = ?$$

$$|3-4i| = ?$$

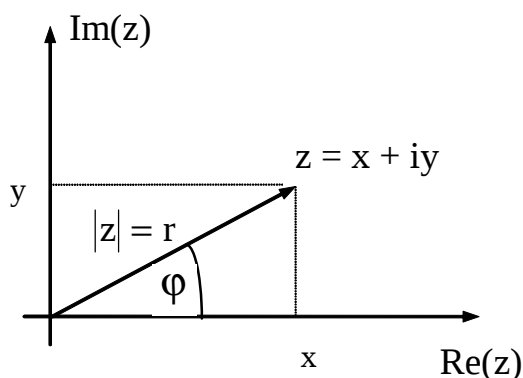
$$\frac{3+4i}{2-i} = ?$$

**11.2. Gaußsche Zahlenebene**

Da eine komplexe Zahl durch die Angabe zweier reeller Zahlen eindeutig festgelegt wird, lassen sich den komplexen Zahlen die Punkte der Ebene, d.h. des Vektorraumes  $\mathbf{R}^2$  zuordnen:

$$z = x + iy \leftrightarrow P(z) = (x, y)$$

Die entsprechende graphische Darstellung heißt Gaußsche Zahlenebene oder komplexe Ebene:



In Analogie zu den Polarkoordinaten kann die komplexe Zahl  $Z = x + iy$  auch durch die Länge des Pfeils und einen Winkel dargestellt werden. Mit Hilfe der Transformationsgleichungen:

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

ergibt sich:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel lässt sich diese Darstellung noch beträchtlich vereinfachen:

### Satz S 11-3 Eulersche Formel

Für jede reelle Zahl  $\varphi$  gilt:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

Beweis in Vorlesung.

**Übung:** Füllen Sie die Tabelle aus:

| $z$                 | $\operatorname{Re}(z)$ | $\operatorname{Im}(z)$ |                       |
|---------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| $e^{i \cdot 0}$     |                        |                        | $e^{i \cdot 0} =$     |
| $e^{i \cdot \pi}$   |                        |                        | $e^{i \cdot \pi} =$   |
| $e^{i \cdot 2\pi}$  |                        |                        | $e^{i \cdot 2\pi} =$  |
| $e^{i \cdot \pi/2}$ |                        |                        | $e^{i \cdot \pi/2} =$ |

Mit dieser Formel folgt die sogenannte Exponentialform:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{mit } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und } \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

### Def D 11-4: Darstellungsformen komplexer Zahlen

#### 1. Algebraische oder kartesische Form

$$z = x + iy, \quad x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

#### 2. Trigonometrische Form

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{mit } r = |z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}, \quad \tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$$

#### 3. Exponentialform

$$z = r e^{i\varphi}$$

$r$  heißt **Betrag**,  $\varphi$  heißt **Phase** (oder Argument oder Winkel) von  $z$ .

Beide Formen 2. und 3. nennt man auch **Polarform**.

**Anmerkungen:**

1. Mit dem Winkel  $\varphi$  ist auch  $\varphi + 2k\pi$  für jedes ganzzahlige  $k$  eine Phase von  $z$ , d.h. die

Phase ist periodisch mit der Periode  $2\pi$ . Insbesondere gilt  $e^{i \cdot 2\pi} = e^{i \cdot 0} = 1$

2. Der sog. Hauptwert der Phase liegt vor, wenn  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ .

3. Jede komplexe Zahl  $e^{i\varphi}$  hat  $\forall \varphi \in \mathbf{R}$  den Betrag (die Länge) 1.

4. Die Umrechnung „Polarform  $\rightarrow$  kartesische Form“ ist einfach: Eulersche Formel benutzen, Real- und Imaginärteil ausrechnen.

5. Bei der Umrechnung „kartesische Form  $\rightarrow$  Polarform“ muss man bei der Ermittlung der Phase aufpassen. Man erhält in Abhängigkeit vom Quadranten:

$$1. \text{ oder } 4. \text{ Quadrant (also } x > 0): \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$2. \text{ oder } 3. \text{ Quadrant (also } x < 0): \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

In Vorlesung wird die Formel für den 2. Quadranten ( $y > 0, x < 0$ ) hergeleitet  
[Papula, Bd.2, S. 200]

(Sonderfall: Wenn  $x=0$ , dann liegt die Zahl genau auf der imaginären Achse.

Wir haben  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  für  $y > 0$  und  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  für  $y < 0$ .)

In vielen Programmbibliotheken (C, C++, Java, MATLAB) ist diese umfassendere Definition des Arcus Tangens über  $\text{atan2}(y, x) \in ]-\pi, \pi]$  verfügbar, die gleich die obige Fallunterscheidung macht.

**Beispiele:**

$$1) \quad z = -2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow x = \operatorname{Re}(z) = -2, y = \operatorname{Im}(z) = 2\sqrt{3}$$

Da der Realteil negativ und der Imaginärteil positiv ist, liegt die Zahl  $z$  im 2. Quadranten. Für Betrag und Phase folgt:

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4, \varphi = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi \hat{=} 120^\circ$$

$$\Rightarrow z = 4\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 4e^{i \cdot \frac{2}{3}\pi} = 4e^{i \cdot 120^\circ}$$

$$2) \quad z = 3e^{i \cdot 5 \cdot 2\pi / 6} \Rightarrow$$

$$x = \operatorname{Re}(z) = 3\cos(5 \cdot 2\pi / 6) = 1.5,$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = 3\sin(5 \cdot 2\pi / 6) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} = -2.598$$



**Übung:** Rechnen Sie von  $z = x + iy$  wieder zurück auf  $r$  und  $\varphi$ .

**Satz S 11-4**

Für die Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  in der Exponentialform gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Phasen addiert.

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und die Phasen subtrahiert.

[Beweis durch Nachrechnen mit trigonometrischer Form >> Hausaufgabe.](#)

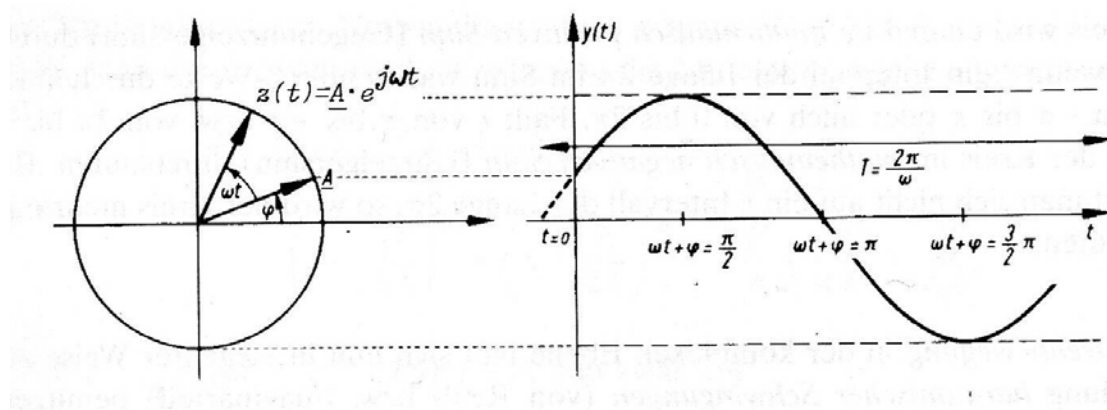
**Anmerkung:**

1. Einfach Merkregel: "Wende auf  $e^{i\varphi}$  die üblichen Potenzgesetze an!"
2. In der trigonometrischen Form ergeben sich die analogen Regeln durch Anwendung der Eulerschen Formel.
3. Aus der Exponentialform der Multiplikation entnimmt man, dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl geometrisch einer Streckung um den Betrag der Zahl und einer Drehung um den Phasenwinkel entspricht, dies nennt man auch **Drehstreckung**.

JAR zur Drehstreckung: [JAR Komplexe Zahlenebene auf Mathe2-Seite.](#)

**11.2.1. Schwingungen als komplexe Zahl**

[bei Interesse im Selbststudium durcharbeiten – nicht klausurrelevant]



Dreht man den Zeiger einer komplexen Zahl  $z_A = A e^{i\varphi}$  um den Ursprung, so lässt sich das durch  $z(t) = z_A e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \varphi)}$  beschreiben. Von der Seite betrachtet sehen wir den Imaginärteil  $y(t)$ , der eine sinusförmige Schwingung beschreibt. (Es gilt  $z(t) = x(t) + iy(t)$ .)

Mit  $z(t)$  lässt sich vielfach besser rechnen als mit  $y(t)$ . Z.B. kann man  $z(t)$  gefahrlos in den Nenner schreiben, denn es wird nie Null (!), im Gegensatz zu  $y(t)$ . Ein oft benutzter Trick: Reelle Funktionen durch eine komplexe Erweiterung ersetzen, damit rechnen, zum Schluss vom Ergebnis nur den Realteil nehmen. Ist bei vielen

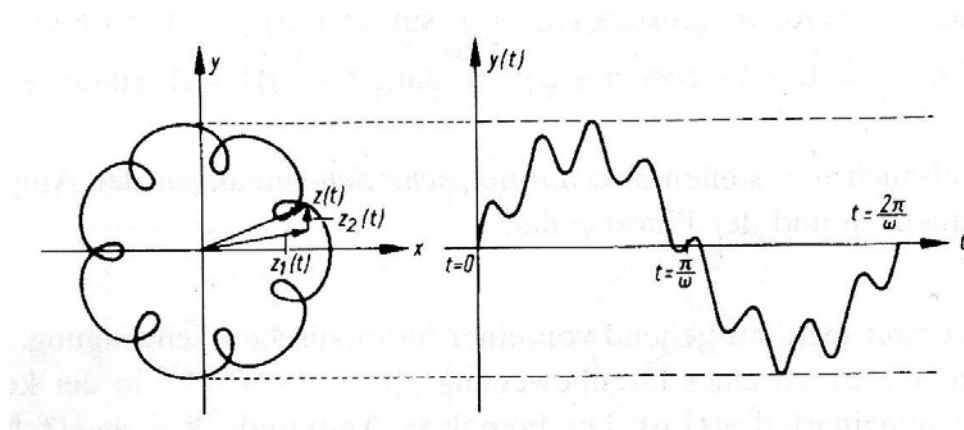
Problemen der Elektrotechnik und der Quantenmechanik einfacher als rein reelle Rechnung. (Wir erinnern an Hadamard: *Der kürzeste Weg zwischen zwei Wahrheiten im Reellen führt über das Komplexe.*)

Zwei Zeiger lassen sich komplex addieren, und helfen so, kompliziertere Schwingungsphänomene darzustellen:

$$z_1(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} = 4A e^{i\omega t}$$

$$z_2(t) = A_2 e^{i\omega_2 t} = A e^{i \cdot 8\omega t}$$

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t)$$



### 11.3. Potenzen komplexer Zahlen

**Aufgabe zur Motivation:**  $Z^3$  bedeutet "Z mal Z mal Z". In der Exponentialdarstellung bedeutet "mal", dass man die Phasen addieren muss, die Beträge multiplizieren. Betrachten Sie

$$z = e^{i\varphi}$$

also eine komplexe Zahl vom Betrag 1. Die Potenzen von  $z$  haben also auch den Betrag 1 (klar?) Überlegen Sie graphisch im Zeigerdiagramm: Für welche Phasen  $\varphi$  gilt

$$z^3 = 1,$$

wann also addieren sich 3 gleiche Phasen zu Gesamtphase 0 (oder  $2k\pi$ )? Zeichnen Sie die Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene ein!

Wie sieht's aus für  $z^4$ , für  $z^2$ ?

Wir haben damit graphisch die Lösungen für

$$z = 1^{1/2}, \quad z = 1^{1/3}, \quad z = 1^{1/4}$$

bestimmt. Eine schönes interaktives Tool hierzu: [MathWeb → Interaktive Aufgaben → Komplexe Zahlen → Komplexe Wurzel](#). Spielen Sie mit verschiedenen  $n=2,3,\dots,6$ -Werten um ein anschauliches Gefühl für die Lösungen zu bekommen.

### 11.3.1. Potenzen mit reellen Exponenten

Bekanntermaßen können Potenzieren und Wurzelziehen beide auf „z hoch c“-Operationen zurückgeführt werden. Damit das einfach zu rechnen ist, wechselt man **immer** in die **Exponentialdarstellung**.

Wenn c keine ganze Zahl ist, sondern eine rationale Zahl (Bruch), dann muss man sämtliche Phasen von z aufschreiben, d.h.  $z = r e^{i(\varphi+2k\pi)}$ . Die Potenzen berechnen sich wie folgt:

$$z^c = \left( r e^{i(\varphi+2k\pi)} \right)^c = r^c e^{i(c\varphi+2kc\pi)}$$

Die Berücksichtigung der Periode ist notwendig, da man in allen Fällen in denen c keine ganze Zahl ist, mehr als eine Lösung erhält. Geometrisch haben alle Potenzen den gleichen Betrag. Die Spitzen der zugehörigen Pfeile liegen alle auf einem Kreis vom Radius  $r^c$ .

**Sei c eine rationale Zahl.** Wir können annehmen, dass  $c = \frac{p}{q}$  mit teilerfremden ganzen Zahlen p und q ist. In diesem Fall ist es zweckmäßig, **nach dem p-Potenzieren** einen Faktor  $2k\pi$  zu ergänzen und k von 0 bis q – 1 laufen zu lassen. Es ergeben sich q verschiedene Lösungen:

$$\begin{aligned} z^c &= z^{\frac{p}{q}} = \left( \left( r e^{i\varphi} \right)^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( r^p e^{i(p\varphi+2k\pi)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( r^{\frac{p}{q}} e^{i\left(\frac{p}{q}\varphi+\frac{2k}{q}\pi\right)} \right) = r^c e^{i\left(c\varphi+\frac{2k}{q}c\pi\right)} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, \dots, (q-1) \end{aligned}$$

Wieso können wir bei k = q-1 aufhören? – Bei k=q erhält man  $\frac{2q}{q}\pi = 2\pi$  und damit wieder die gleiche Phase wie bei k=0.

Warum **erst** p-Potenzieren und **dann**  $2k\pi$  ergänzen? – Damit man keine zu großen Phasen erhält. Wenn man erst  $2k\pi$  ergänzt und dann mit p potenziert, erhält man  $2kp\pi$  (was nicht falsch ist, kp ist ja auch eine ganze Zahl). Dadurch entstehen aber höhere Winkel (mehr als  $1x, \text{rum}'$ ).

**Beispiel: Was ist  $i^{\frac{5}{3}}$  ?**

Es ist  $i = e^{i\pi/2}$ , d.h. es gilt  $r=1$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$z = i^{\frac{5}{3}} = \left( e^{i(\frac{1}{2}\pi)} \right)^{\frac{5}{3}} = \left( e^{i(\frac{5}{2}\pi)} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( e^{i(\frac{5}{2}\pi + 2k\pi)} \right)^{\frac{1}{3}} \\ = \left( e^{i(\frac{5}{6}\pi + \frac{2k}{3}\pi)} \right) \quad \text{mit } k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = e^{i(\frac{5}{6}\pi)} = -0.866 + 0.5i$$

$$z_1 = e^{i(\frac{9}{6}\pi)} = -i$$

$$z_2 = e^{i(\frac{13}{6}\pi)} = 0.866 + 0.5i$$

Alternative Lösungsmöglichkeit: Im ersten Schritt wird die spezielle Lösung  $z_0$  (für  $k=0$ ) ausgerechnet, man ergänzt also kein  $2k\pi$ . Im zweiten Schritt erhält man die Menge aller Lösungen, indem man in der Phase  $k \cdot 2\pi/q$  für  $k=0, 1, \dots, q-1$  addiert.

Im Beispiel:

$$z_0 = i^{\frac{5}{3}} = \left( e^{i(\frac{1}{2}\pi)} \right)^{\frac{5}{3}} = \left( e^{i(\frac{5}{6}\pi)} \right)$$

$$\text{Allgemein: } z_k = \left( e^{i(\frac{5}{6}\pi + \frac{2k}{3}\pi)} \right) \quad \text{mit } k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = e^{i(\frac{5}{6}\pi)} = -0.866 + 0.5i$$

$$z_1 = e^{i(\frac{9}{6}\pi)} = -i$$

$$z_2 = e^{i(\frac{13}{6}\pi)} = 0.866 + 0.5i$$

Wer sich  $k \cdot 2\pi/q$  schlecht vorstellen kann, kann auch konsequent in Grad rechnen:  
 $(5/6)\pi = 150^\circ$  und  $k \cdot 2\pi/3 = k \cdot 360^\circ/3 = k \cdot 120^\circ = \{0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\}$ .



Übung: Berechnen und zeichnen Sie  $z = (1+i)^{\frac{3}{4}}$ .

### Spezialfälle

[Selbststudium, in V weglassen, wenn Zeit knapp]

**1.)  $c$  ist eine ganze Zahl  $n$ .** Dann ist  $2kc\pi = 2kn\pi$  wieder ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  und alle Winkel fallen zusammen. In diesem Fall gibt es nur eine Lösung:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Der nachfolgende Satz liefert eine kompakte Zusammenfassung vieler trigonometrischer Additionstheoreme:

**Satz S 11-5 (Satz von Moivre)**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

Bew: folgt direkt aus den Potenzrechenregeln und der Eulerschen Formel (**Satz S 11-3**).



**Übung:** Benutzen Sie den Satz von Moivre, um die Additionstheoreme für  $\cos(2\varphi)$  und  $\sin(2\varphi)$  herzuleiten.



**Übung:** Leiten Sie die "normalen" Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

aus der Eulerschen Formel (**Satz S 11-3**) her.

Lösung in den Übungen.

**2.) c ist eine irrationale Zahl.** In diesem Fall ist kein ganzzahliges Vielfaches von c eine ganze Zahl, daher ist für kein ganzzahliges k die Größe  $2kc\pi$  ein Vielfaches von  $2\pi$ . Es gibt daher unendlich viele Lösungen, die alle auf dem Kreis mit dem Radius  $r^c$  liegen.

### 11.3.2. Fundamentalsatz der Algebra

Wie wir in 2.) gesehen haben, besitzt jede Gleichung

$$z = w^{\frac{1}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad z^n = w$$

also genau n komplexe Lösungen für z. Es gilt sogar wesentlich mehr:

#### Satz S 11-6 Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades ( $n \in \mathbf{N}$ )

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_j$  besitzt in der Menge  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen genau n "Lösungen"  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , d.h. das Polynom  $P_n$  lässt sich wie folgt in Linearfaktoren zerlegen:

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Anmerkungen:

1. Die  $z_1, z_2, \dots, z_n$  müssen nicht alle verschieden sein, deshalb "Lösungen" in Anführungsstrichen.
2. Dieser Satz zeigt, dass manche Dinge im Komplexen einfacher sind! Für ein reelles Polynom kann es keine, eine, zwei, ..., viele Lösungen geben (d.h. viele lästige

Fallunterscheidungen sind zu beachten). Im Komplexen gibt es immer  $n$  Linearfaktoren.

3. Folgerung: Jedes Polynom  $P_n(z)$  mit  $n \geq 1$  hat mindestens ein  $z \in \mathbb{C}$  als Lösung.
4. Der Satz ist einfach aufzuschreiben, aber extrem schwer zu beweisen.

### Beispiel:

Das Polynom  $P_3(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z-1)(z^2 + 4)$  zerfällt in den reellen Zahlen offensichtlich nicht in Linearfaktoren, da die Gleichung  $z^2 + 4 = 0$  keine reellen Lösungen hat. In den komplexen Zahlen lässt sich  $P_3$  wie folgt zerlegen:

$$P_3(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z-1)(z^2 + 4) = (z-1)(z-2i)(z+2i)$$

### Beispiel quadratische Ergänzung:

$$z^2 + z = -\frac{10}{4}$$

$$z^2 + z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{10}{4}$$

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$$

$$\left(z + \frac{1}{2}\right) = \pm i \frac{3}{2}$$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{3}{2}$$

**Übung:** Welche  $z_{1,2} \in \mathbb{C}$  lösen die Gleichung

$$z^2 - (4 - 2i)z + (5 - 4i) = 0$$

Bestimmen Sie die Lösung mit der Methode der quadratischen Ergänzung.

### Braucht man nach $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ noch größere Zahlkörper als $\mathbb{C}$ ?

Nein, denn die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  bilden einen "algebraisch abgeschlossenen" Körper. Denn der Fundamentalsatz der Algebra besagt: "Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten und Grad größer 0 hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ ." Mit anderen Worten: Während es bei den anderen Zahlkörpern immer noch Polynomgleichungen über dem Zahlkörper gab, die nicht lösbar waren, gibt es jetzt eine solche Gleichung nicht mehr:

|                                               |                                                                  |                   |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $x + 2 = 0$                                   | nicht lösbar in $\mathbb{N}$ , führt auf $\mathbb{Z}$ .          | $x = -2$          |
| $5x - 3 = 0$                                  | nicht lösbar in $\mathbb{Z}$ , führt auf $\mathbb{Q}$ .          | $x = 3/5$         |
| $x^2 - 2 = 0$                                 | nicht lösbar in $\mathbb{Q}$ , führt auf $\mathbb{R}$ .          | $x = \pm\sqrt{2}$ |
| $x^2 + 1 = 0$                                 | nicht lösbar in $\mathbb{R}$ , führt auf $\mathbb{C}$ .          | $x = \pm i$       |
| $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ | <b>lösbar</b> in $\mathbb{C}$ für alle $a_i \in \mathbb{C}$ (!!) |                   |

## 11.4. Wieso komplexe Zahlen "schön" sind: Anwendungsfall Fraktale

[bei Interesse im Selbststudium durcharbeiten – nicht klausurrelevant]

Die Natur ist komplex, d.h. vielgestaltig. Der Mensch versucht sie durch möglichst einfache Gesetze zu beschreiben. Mit dem von Benoit Mandelbrot eingeführten Begriff der **Fraktale** haben die Mathematiker etwas entwickelt, was aus einfachen Gesetzen erstaunlich komplexe Muster hervorbringt.

Eine wichtige Rolle spielen dabei die komplexen Zahlen. Betrachten Sie die einfache Rekursion

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad \text{mit} \quad z_n, c \in \mathbb{C}$$

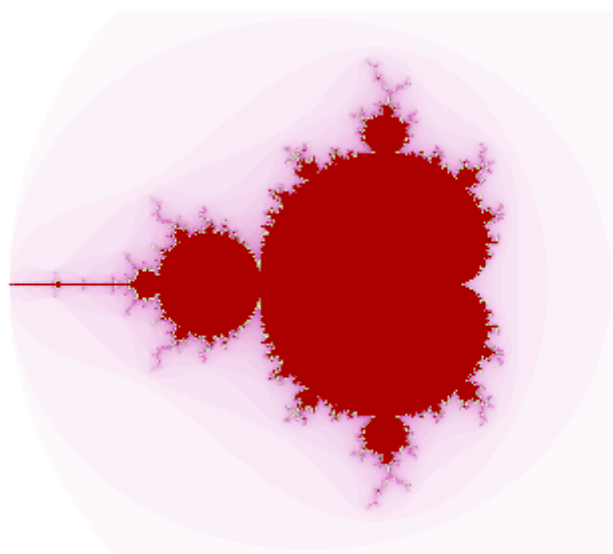
$$z_0 = 0$$

Jetzt stellen wir nur die einfache Frage: Für welche  $c$  bleibt die Folge beschränkt?<sup>6</sup>

Man mag erwarten, dass irgendein glattes Gebiet in der komplexen Ebene die Antwort ist. Die Antwort ist aber wesentlich komplexer und führt auf die **Mandelbrot-Menge**, die auch unter dem Namen "Apfelmännchen" bekannt ist.

Das Gebiet ist am Rand zerfranst, immer wieder tauchen konvergente Inseln im divergenten Meer auf und vor allem: Das Muster ist **selbstähnlich**, d.h. es enthält an vielen Stellen ähnliche verkleinerte Kopien seiner selbst.

Apfelmännchen's Zoomfahrt: <https://wolfgangbeyer.de/chaos/mandelzoom.htm>. (lokal)



JAR Apfelmännchen auf Mathe2-Seite

(adaptiert von [www.jjam.de](http://www.jjam.de)). Rot: für diese  $c$  bleibt Folge beschränkt; andere Farben: für diese  $c$  sprengt die Folge mehr oder weniger schnell jede Schranke)

Selbstähnliche Strukturen finden sich auch an vielen Stellen in der Natur: Farne, Berge, Küsten, Bäume, Schneeflocken, DNA-Faltungen, ...

Neben der ästhetischen Schönheit der fraktalen Strukturen hat ihre mathematische Modellierung also vor allem einen Zweck: zu verstehen, wie man komplexe Systeme aus einfachen Gesetzen beschreiben kann. (Das muss nicht immer mit komplexen

Zahlen geschehen, aber sie vereinfachen oft das Leben ungemein.)

Informatik-Anwendungsfall **Bildkompression**: Bilder lassen sich extrem komprimieren, wenn man sie aus einfachen "fraktalen Bildungsgesetzen" konstruieren kann >> Iterierte Funktionensysteme (IFS)

<sup>6</sup> Das bedeutet in den meisten Fällen: Wo konvergiert die Folge?

## 11.5. Fazit: Komplexe Zahlen

Wozu sind komplexe Zahlen gut?

1. Mit ihnen lassen sich vorher unlösbare Gleichungen wie  $z^2 = -1$  lösen. Während man vorher (in den reellen Zahlen) bei algebraischen Gleichungen umständliche Fallunterscheidungen "hat keine/eine/mehrere Lösungen" machen musste, gilt jetzt (im Körper der komplexen Zahlen) einheitlich der Fundamentalsatz der Algebra (**Satz S 11-6**):

Eine Gleichung n. Grades lässt sich in genau n Linearfaktoren zerlegen (hat genau n Lösungen).

2. Die Gaußsche Zahlenebene gibt eine anschauliche Vorstellung von komplexen Zahlen als Vektoren. Die alternative Polar- oder Exponentialdarstellung  $z = re^{i\varphi}$  einer komplexen Zahl erlaubt einfaches Multiplizieren und Potenzieren.

3. Die Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

ist eine der wichtigsten Formeln der mathematischen Physik. Mit ihr lassen sich Schwingungsphänomene (sin- und cos-Funktion) kompakt schreiben über  $e^{i\varphi}$ . Mit  $e^{i\varphi}$  lässt sich viel einfacher rechnen (Multiplikation oder Potenzieren durch Addition bzw. Multiplikation im Exponenten – viel einfacher als trigonometrische Additionstheoreme!). Man darf durch  $e^{i\varphi}$  immer dividieren, was bei  $\cos \varphi$  an den Nullstellen nicht erlaubt wäre.

- a. Anwendungsfall: Wechselstrombeziehungen in der Elektrotechnik – genauso aber auch bei anderen Schwingungsphänomenen.
4. Weiteres Anwendungsgebiete:
    - a. Fourierreihen und Fouriertransformation; auch hier werden die Berechnungen durch  $e^{i\varphi}$  wesentlich leichter. Die Fouriertransformation spielt in der für die technische Informatik wichtigen **Signalverarbeitung** und in der **Bildverarbeitung** eine große Rolle → **Gerhard Hartmann**, Modul „Naturwissenschaftliche Grundlagen Digitaler Medien“ (NGDM).
    - b. Lösen von **Differentialgleichungen (DGL)**: Mit dem Ansatz  $e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , lassen sich ganz verschiedene Typen von DGLs gemeinsam lösen.

### 11.5.1. Where to go from here

Vertiefungsmöglichkeiten: Wenn Sie mehr über komplexe Zahlen lernen wollen und wissen wollen, was man noch mit komplexen Zahlen machen kann:

- Lösen komplizierter Integrale im Reellen durch den "Umweg" über die Gaußsche Zahlenebene
- Lösen von linearen Differentialgleichungen über Ansatz  $x(t) = r(t)e^{i(\omega t + \varphi)}$
- Wechselstrombeziehungen in der Elektrotechnik [Stingl, S. 156-161]
- Fraktale: schöne Einführung in [Schroeder94] und schöne Bilder in [PeitgenR86]
- IFS (Iterierte Funktionensysteme) zur Bildkompression: [Barnsley88]
- Fraktale programmieren: [www.jjam.de](http://www.jjam.de).