Wahrscheinlichkeit

Würfel, 12x werfen

rel. Häufigkeit

$h_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{3}{12} = 0.25$

$\xrightarrow[N\to\infty]{\text{ideal}} \quad \frac{1}{6} = P_1 = 0.1666$

Stichprobe, $N = 12$

$(2, 5, 1, 3, 1, 1, 6, 4, 2, 3, 6, 4)$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Bsp zu Def 10-9

a) Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

mögl. Ereignisse: $A = \{6\}$ "Sechs"

$B = \{1, 3, 5\}$ "ungerade"

$C = \{1, 2\}$ "< 3"

zu C komplementär $\overline{C} = \Omega \setminus C = \{3, 4, 5, 6\}$

" B " $\overline{B} = \Omega \setminus B = \{2, 4, 6\}$ "gerade"

b) Roulette $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$

Ereignisse z.B. "gerade"

"ungerade"

"1 - 12" usw

Folgerung aus den Wahrsch. axiomen

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

denn: $\overline{A}$ und A sind zueinander unvereinbar

$$P(A) + P(\overline{A}) \overset{Ax.3}{=} P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) \overset{Ax.2}{=} 1$$

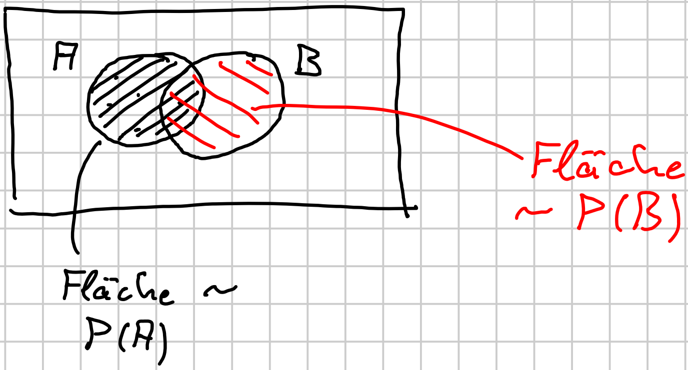
$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2. $P(\{\}) = 0$

denn: spezialisiere Nr. 1 auf $\overline{A} = \{\}$ und $A = \Omega$

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

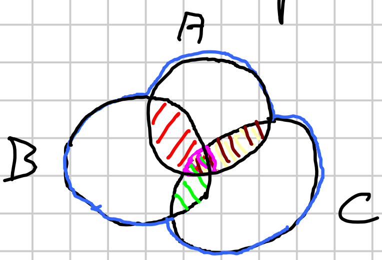
Graphische Erklärung



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}$$

die doppelt gezählte Fläche einmal wieder abziehen

Inklusion-Exklusion für 3 Mengen A, B, C



$|A \cup B \cup C|$

$= |A| + |B| + |C|$

$- |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$

$+ |A \cap B \cap C|$

Verschiedene Dinge die man zählen kann beim Urnenexperiment

Stichprobe: k Elemente aus Urne mit n Kugeln entnehmen

Ergebnis →	geordnet (Variation)	ungeordnet (Kombination)
Ziehen mit Zurücklegen (ZmZ)	Wörter aus Alphabet	geheime Wahl-ausgänge
Ziehen ohne Zurücklegen (ZoZ)	Pferdewetten	Lotto "6 aus 49" Los-ziehen, k-fach

Wie viele Wörter Länge 5 aus Alphabet $\{a, b, c, d\}$ ("abbca" und "aacbb" sind versch. Worte)

Pferdewetten: 8 Pferde, wieviele mögliche Wettscheine (Erster, Zweiter, Dritter)

Beweis / Erklärung zu Satz 10-4

1) ZmZ / geordnet: Jeder Platz der k-elementigen Teilmenge kann mit n Elementen besetzt werden:

$$\underbrace{\underline{n}\cdot\underline{n}\cdot\underline{n}\cdot\underline{n}\cdot\underline{n}}_{k\text{-mal}} = \boxed{n^k}$$

$$\boxed{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5}\cdot\ \cdot \cancel{1}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\ \cdot\cancel{1}}}$$

2) ZoZ / geordnet:

$$\underbrace{\underline{n}\cdot\underline{(n-1)}\cdot\underline{(n-2)}\cdot\ldots\cdot\underline{(n-k+1)}}_{k\text{-mal}} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

3) ZoZ / ungeordnet: (LoHo)

wie bei 2), also $\frac{n!}{(n-k)!}$, nur dass wir alle Permutationen der k-elementigen Liste als ein Resultat zählen

Wie viele Permutationen gibt es?

Bsp. k=3: a c d → d a c

$$k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1 = k!$$

⇒ es gibt $k!$ solche Permutationen

D.h. Anzahl bei 3) ist

$$\frac{\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \boxed{\binom{n}{k}} \quad \text{Binomialkoeff.}$$

Übungen

Ü1: a) Wörter Länge 4 aus 26er-Alphabet

$n = 26$, $k = 4$, ZmZ, geordnet: $n^k = \underline{\underline{26^4}}$

b) Wörter Länge 4 aus 5er-Alphabet

$n = 5$, $k = 4$, ⟹ $n^k = 5^4$

Laplacescher Spezialfall, alle Worte gleichwahrsch.

$$P(A) = \frac{\text{günstige Ereignisse}}{\text{alle Ereignisse}} = \frac{5^4}{26^4} = \left(\frac{5}{26}\right)^4 = 0.137\,\%$$

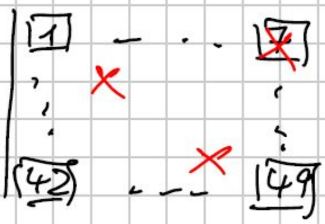
Ü2 a) Pferderette: ZoZ, geordnet : $\frac{n!}{(n-k)!}$

$n = 8 \quad , \; k = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \underline{\underline{336}}$

b) $P(\text{zufällig den Ersten richtig}) = \frac{1}{8}$

$$\frac{1 \cdot 7 \cdot 6}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{8}$$

Ü3 (Lotto)



a) ZoZ, Kombination

Anzahl $\binom{49}{6} \approx 13.9 \cdot 10^6$

b) Jede Ziehung hat 6 Richtige, 43 Falsche

4 mal 2mal

Anzahl $\binom{6}{4}$ Anzahl $\binom{43}{2}$ $\Rightarrow$ Wettscheine mit genau 4 Rich.

Insgesamt $P(\text{"4 Richtige"}) \underset{\text{Laplace}}{=} \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0.000968 \approx \frac{1}{1000}$

Ü4 Länge $n = 5$

(1) platziere 2 a's an den Stellen $1, \dots, 5$

(2) fülle den Rest mit b's oder c's auf

Zu (1) Ziehen aus Positionsmenge $\{1, 2, \dots, 5\} \Rightarrow$ 2x ZoZ kombi

$\Rightarrow \binom{5}{2}$

Zu (2) es verbleiben 3 Plätze, mit b oder c füllen $\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Möglichk.

Insgesamt: $\binom{5}{2} \cdot 2^3 = 10 \cdot 8 = \underline{\underline{80}}$ solche Wörter

$$10 \left\{ \begin{array}{l} aa*** \\ a*a** \\ a**a* \\ \vdots \\ ***aa \end{array} \right. \qquad * = b \text{ oder } c$$

Ü5

$n = 3$ Kandidaten

$k = 60$ Wähler

Anzahl Wahlausgänge $\binom{n+k-1}{k} = \binom{62}{60}$

$= \underline{\underline{1891}} = \frac{62 \cdot 61}{2}$