Vorlesungsskript

der Zoom-Vorlesung

Mathematik 2 für AI, MI, IT

SS 2020

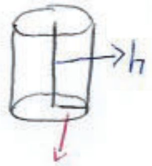
ab 3.6.2020

Dr. Ane Schmitter

Inhalt: Mehrdimensionale Analysis
Graphentheorie

Mehrdimensionale Differentialrechnung

Bisher: Funktionen mit einer unabhängigen Variable
$$y = f(x)$$

Aber: Volumen Zylinder 

$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Die Funktion, die das Volumen darstellt, hängt von r und h ab, ist also eine Funktion mit <u>zwei</u> unabhängigen Variablen

Weiteres Beispiel: Wurfparabel
$$W(\alpha, v_0) = \frac{2v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} \quad (g \text{ Erdbeschleunigung})$$
$$= \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$$

Funktion mit <u>zwei</u> unabhängigen Variablen: α und v_0

Dies führt auf die allgemeine Definition:

Eine Funktion
$$f: D \to \mathbb{R} \text{ mit } D \subset \mathbb{R}^n, \; x = \underbrace{(x_1, \ldots x_n)}_{n\text{-Tupel}} \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$$
heißt eine Funktion mit n unabhängigen Variablen

Spezialfall $n=2$ $\quad f: D \to \mathbb{R} \; D \subset \mathbb{R}^2,$
$$x = \underbrace{(x_1, x_2)}_{\text{geordnetes Paar}} \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

Bem: Schreibweise für $n=2$

$z = f(x,y)$ $\quad$ x,y unabhängige Variablen
$\quad$ z abhängige Variable

Darstellungsmöglichkeiten

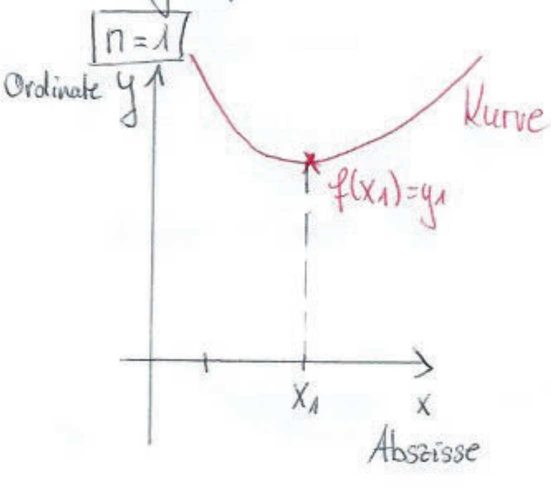
Zunächst: $n=2$

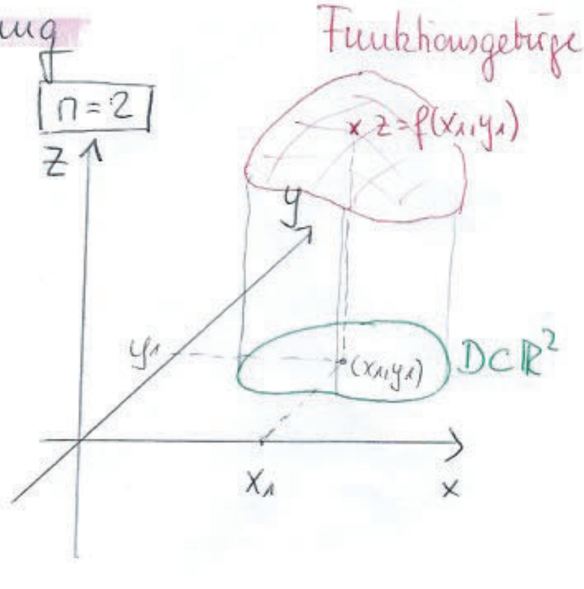
1) Analytische Darstellung $\quad$ $z=f(x,y)$ explizit
$\quad$ $F(x,y,z)=0$ implizit

2) Funktionswertetabelle

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	$z_{11} = f(x_1,y_1)$	$z_{12} = f(x_1 y_2)$		$z_{1m} = f(x_1,x_m)$
x_2	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$				
x_n	$z_{n1} = f(x_n,y_1)$			$z_{nm} = f(x_n,y_m)$

3) Graphische Darstellung





③

Bp. $f(x,y) = 110 - 10x + 5y$ $\quad 1 \le x \le 7$, $3 \le y \le 10$

Ebene im Raum

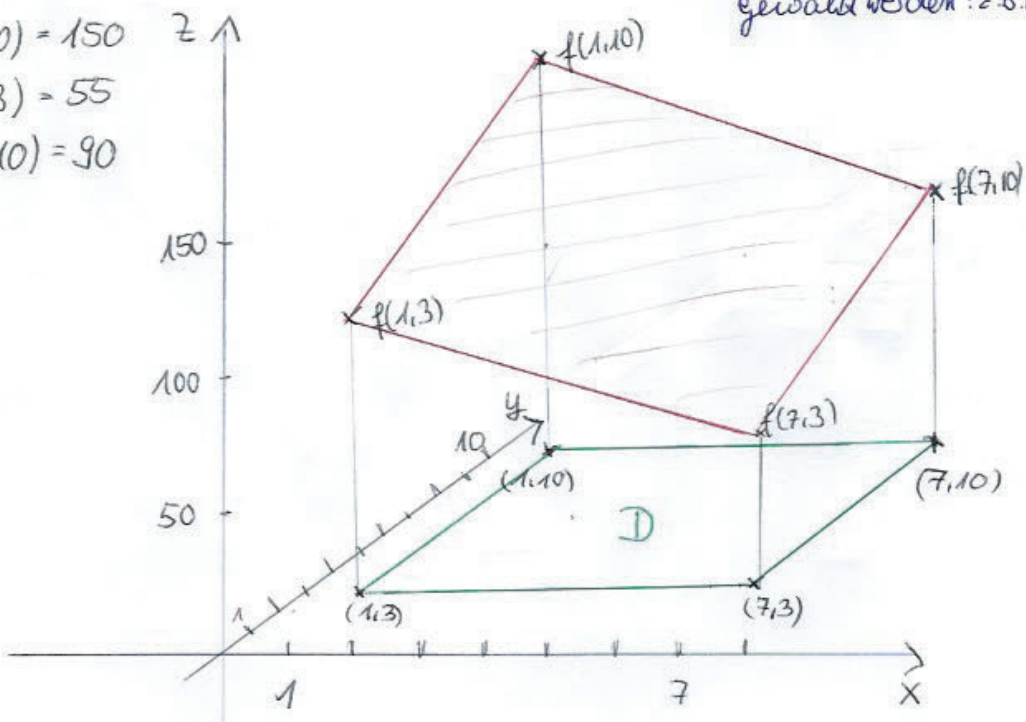
als Bp. festgelegt, könnte auch anders gewählt werden: z.B. $\mathbb{R}^2$

$f(1,3) = 115$

$f(1,10) = 150$

$f(7,3) = 55$

$f(7,10) = 90$



Die Ebene wird durch eine lineare Funktion dargestellt. "Funktionsgebirge" werden durch nicht lineare Funktionen dargestellt.

Bp. $z = f(x,y) = 9 - 3x^3 + x \cdot y + 4y^2$

$z = f(x,y) = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$

$z = f(x,y) = y + \ln x + e^{x \cdot y}$, $x > 0$

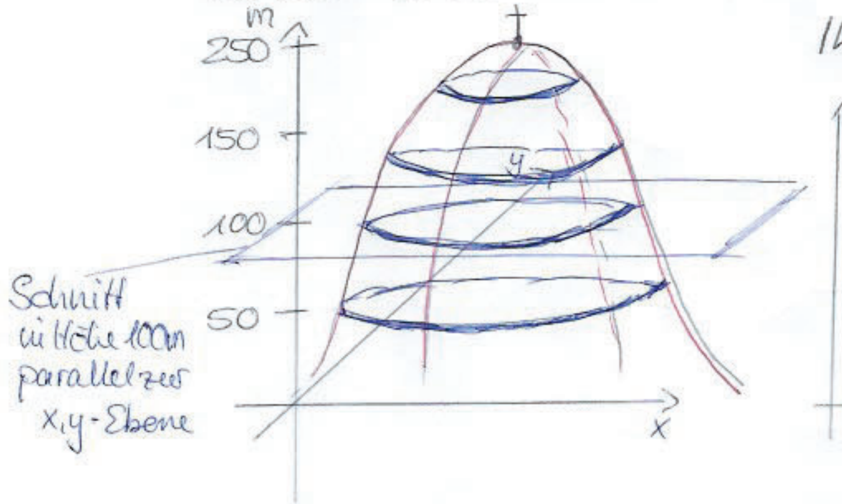
Hier handelt es sich um Flächen im $\mathbb{R}^3$

3D-Funktionen

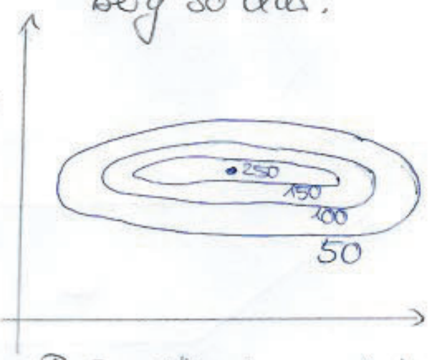
Frage: Kann man Funktionen mit drei unabhängigen Variablen graphisch darstellen? Antwort: Nein, das wäre 4D

Wenn eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen gegeben ist, wie kann man sich einen Überblick verschaffen, wie das "Funktionsgebirge" im dreidimensionalen Raum aussieht?

Bp.: Sie sehen einen Berg vor sich und wissen nicht, wie hoch er ist und ob sie ihn besteigen sollen



Ihre Landkarte stellt den Berg so dar:



Diese Höhenlinien haben Sie sicher schon einmal auf einer Wanderkarte gesehen!

Einen ersten Eindruck über die "Form" gewinnt man durch Höhenliniendiagramme

Höhenlinien entstehen dadurch, dass man die Schnittkurven parallel zur x-y-Ebene in unterschiedlicher Höhe betrachtet.

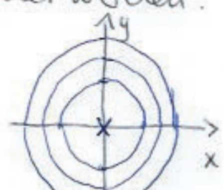
Bp. $z = f(x,y) = x^2+y^2$

Es sollen die Höhenlinien für z jeweils konstant c

$c = 0, 1, 2, 3$

berechnet werden.

$$\left.\begin{array}{ll} c=0 & 0=x^2+y^2 \\ c=1 & 1=x^2+y^2 \\ c=2 & 2=x^2+y^2 \\ c=3 & 3=x^2+y^2 \end{array}\right\} \text{Kreise um 0 mit } r=\sqrt{c}$$



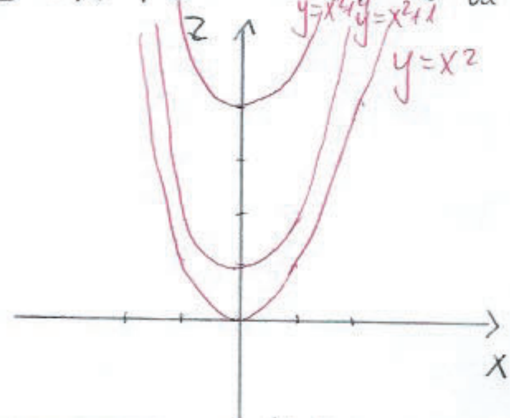
Höhenlinien : Schnittkurven, die entstehen, wenn parallel der x-y-Ebene "geschnitten" wird.

Um sich über die anderen Schnittebenen einen Überblick über die Schnittkurven zu verschaffen, erstellt man Schnittkurvendiagramme parallel zur x-z-Ebene (y konstant) und parallel zur y-z-Ebene (x konst.)

Schnittkurvendiagramm parallel zur x-z-Ebene für

$$z = f(x,y) = x^2+y^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = 0 : & z = x^2+0^2 = x^2 \\ y_2 = 1 : & z = x^2+1^2 = x^2+1 \\ y_3 = 2 : & z = x^2+2^2 = x^2+4 \end{array}\right\}$$ verschobene Normalparabeln in z-Achsenrichtung



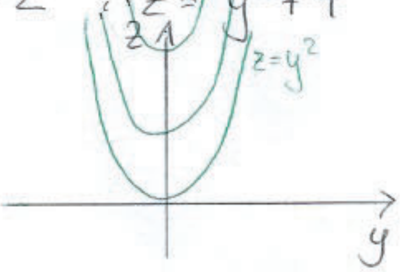
Schnittkurvendiagramm parallel zur y-z-Ebene (x konstant)

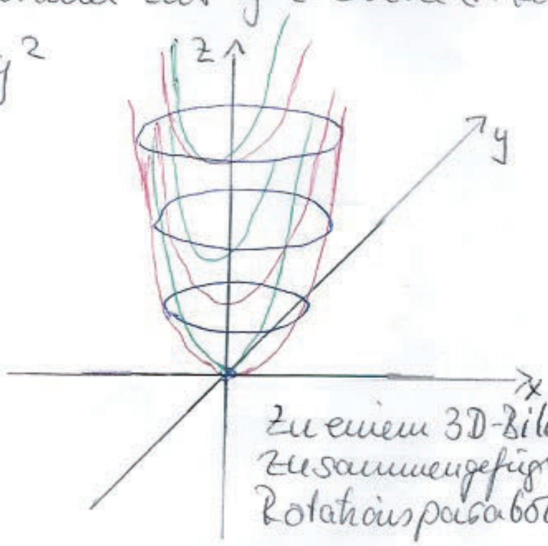
$$z = f(x,y) = x^2+y^2$$

$x_1 = 0 : z = y^2$

$x_2 = 1 : z = y^2+1$

$x_3 = 2 : z = y^2+4$





Zu einem 3D-Bild zusammengefügt: Rotationsparaboloid

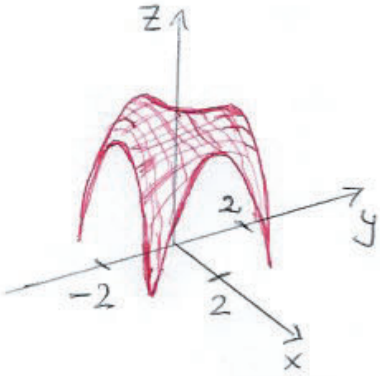
Zusammenfassung Schnittkurven (für Fkt. mit 2 Variablen)

Schnittebenen parallel zur x-y-Ebene: Höhenlinien
z konstant
Schnittebenen parallel zur x-z-Ebene: y konstant
Schnittebenen parallel zur y-z-Ebene: x konstant

Die Funktionen der Schnittkurven hängen nur noch von einer Variablen ab, während die andere Variable für die jeweilige Schnittebene konstant gehalten wird. Dies wird später beim partiellen Differenzieren von Bedeutung sein.

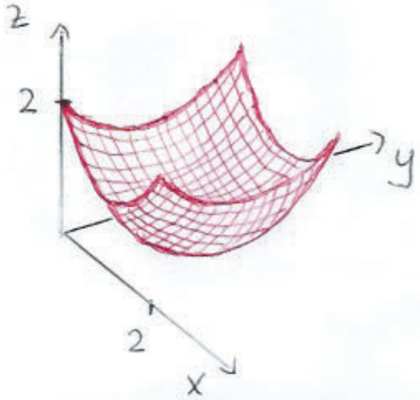
Vereinigt man die drei Schnittkurvendiagramme zu einem dreidimensionalen "Gebilde", dann erhält man eine Vorstellung über die "3D"-Funktion.

Bp. für 3D-Funktionen:



$$z = f(x,y) = 16 - x^2 \cdot y^2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$
$$-2 \leq y \leq 2$$



$$z = f(x,y) = 0{,}5\left[(x-1)^2 + (y-1)^2\right] + 1$$

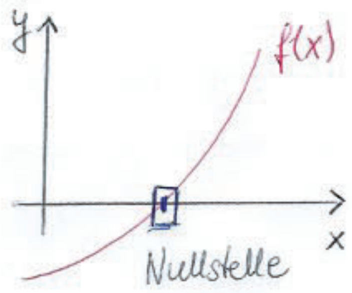
$$0 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq 2$$

Funktionseigenschaften mehrdimensionaler Funktionen

zunächst: $n=2$

1) Nullstellen

1 Variable: $y=f(x)$ $\quad f(x)=0$



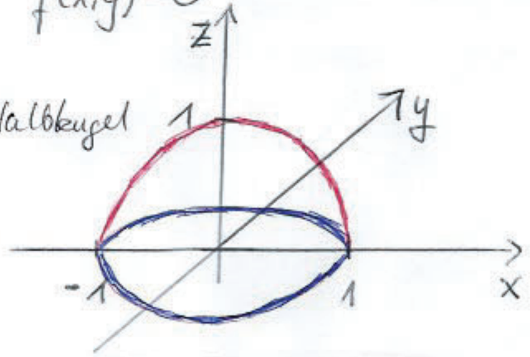
2 Variablen: $z=f(x,y)$ $\quad f(x,y)=0$

$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ Halbkugel

$f(x,y)=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2-y^2}=0$

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2=1$

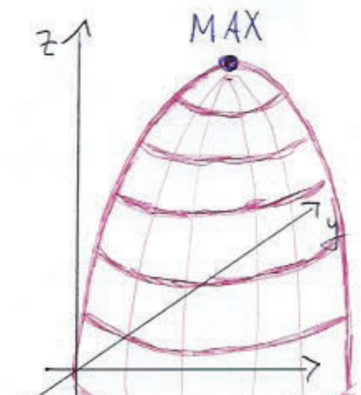
Kreis um Null mit Radius 1

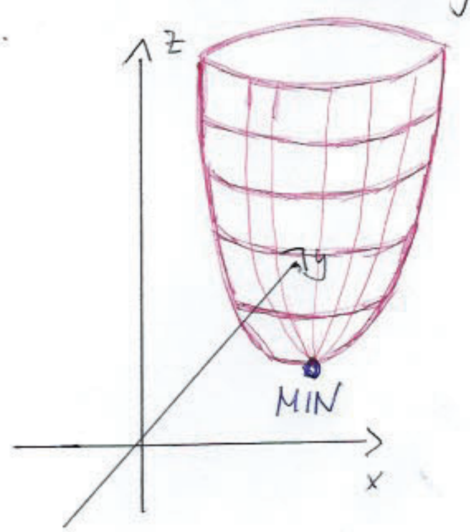


Man setzt auch im Falle von zwei unabhängigen Variablen die Funktionsgleichung gleich 0 und erhält anstelle eines einzigen Punktes eine Schnittkurve in der x-y-Ebene.

2) Extremwerte

Die höchsten oder tiefsten Punkte bei 3D-Flächen, auch Funktionsgebirge genannt, kann man sich als Bergspitzen oder Talsohlen vorstellen.





Def: relative (lokale) Extremwerte

Eine Funktion $z = f(x,y)$ besitzt im Punkt (ξ, η)

(Nebenbem: ξ = Xi
η = Eta
ε = Epsilon)

ein Maximum bzw. ein Minimum,

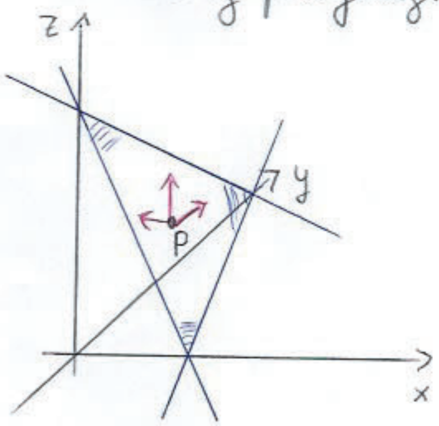
wenn für alle Punkte (x,y) einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(\xi,\eta)$ des Punktes (ξ,η) gilt:

Maximum $f(x,y) \le f(\xi,\eta)$ für alle $(x,y) \in U_\varepsilon(\xi,\eta)$

Minimum $f(x,y) \ge f(\xi,\eta)$ für alle $(x,y) \in U_\varepsilon(\xi,\eta)$

3) Steigung

Bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen gilt als Maß für die Steigung die Steigung der Tangente an der entsprechenden Stelle der Funktion. Die Richtung der Steigung war dadurch eindeutig festgelegt.



Die Beschreibung der Steigung im Punkt P kann man mit folgender Situation vergleichen: Ein Wanderer an einem Berg registriert eine andere Steigung, je nachdem, in welche Richtung er weiterwandert.

Daher muss, wenn man von einer Steigung in einem Punkt einer 3D-Fläche spricht, immer noch die Richtung der Steigung mitangegeben werden.

Allg. Definition: Die Steigung einer Fläche ist nach Festlegen einer Richtung die Steigung der Schnittkurve, die entsteht, wenn man die Fläche in der betreffenden Richtung schneidet.

Dies geht in die Definition der partiellen Ableitungen 1. Ordnung ein. (s.u.)

4) Krümmung

Die Begriffe konvex und konkav lassen sich von Funktionen mit einer unabhängigen Veränderlichen auf Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen übertragen.

Für Funktionen mit 2 unabhängigen Variablen gilt:

Eine Funktion ist konvex gekrümmt, wenn die Verbindungslinie zweier Funktionswerte vollständig über der Fläche verläuft (im Falle eines Minimums z.B.)

Eine Funktion ist konkav gekrümmt, wenn die Verbindungslinie zweier Funktionswerte vollständig unter der Fläche verläuft (im Falle eines Maximums z.B.)

5) Grenzwert und Stetigkeit

Auch die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit können auf Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen entsprechend übertragen werden. Es soll an dieser Stelle jedoch nicht näher darauf eingegangen werden.