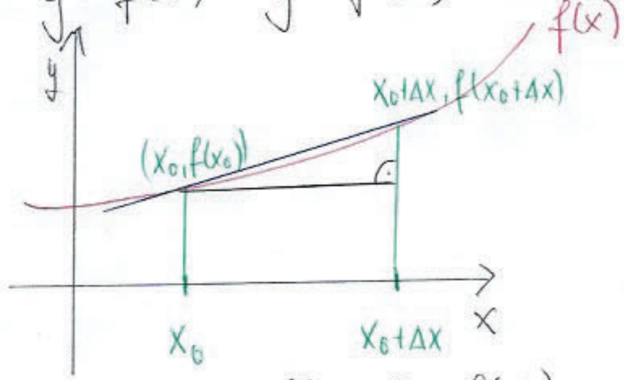
Alle bisher besprochenen Eigenschaften gelten für Funktionen mit n unabhängigen Variablen.
Im Falle $n = 2$ (2 unabhängige Variablen) kann man sich alles hervorragend im 3D-Raum vorstellen.
Kommt eine weitere unabhängige Variable dazu, so versagt unsere Vorstellungskraft. Daher werden wir den Begriff "partiell Ableiten" für $n = 2$ kennenlernen, die Definition dann auf ein beliebiges n ausweiten.
(Permanenzprinzip in der Mathematik)

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$n = 1$ Wdh. $y = f(x)$ $y' = f'(x)$

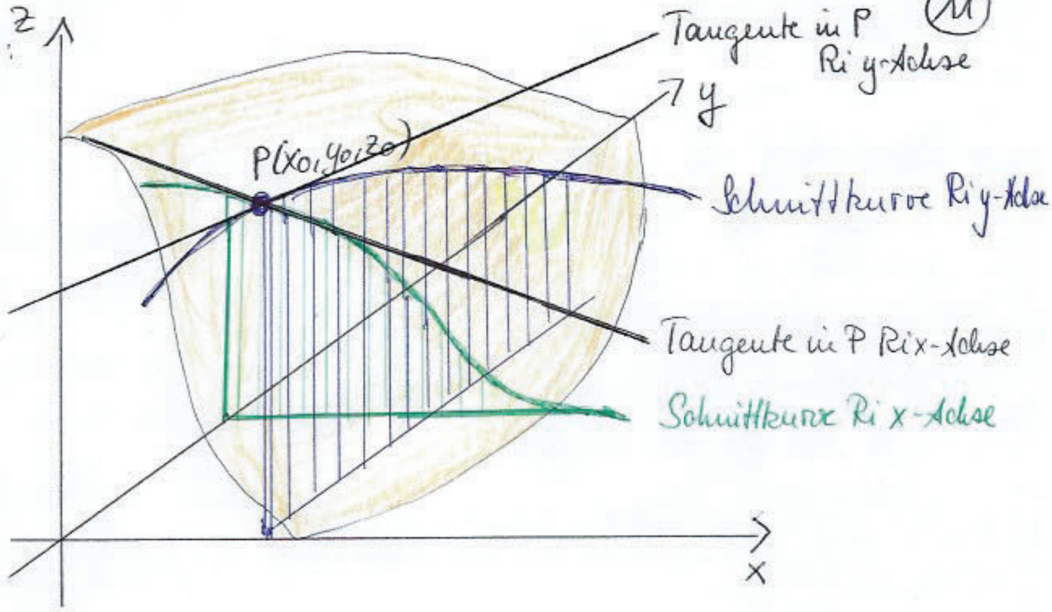


$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{x_0+\Delta x - x_0}$$

Die Steigung in einem Punkt ist ein Grenzwert!

$n = 2$ Man wählt als Richtung die Parallelen zu den Koordinatenachsen, d. h. man schneidet für einen Flächenpunkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ parallel zur x,z- bzw. y,z-Ebene. Als Schnittkurven erhält man Flächenkurven, die näher untersucht werden. Die Schnittkurven sind Funktionen mit einer unabhängigen Variablen und können in bekannter Art untersucht werden.

Skizze:



Def: Partielle Ableitung 1. Ordnung für $z = f(x,y)$

a) Die erste partielle Ableitung der Funktion $z = f(x,y)$ nach der Variablen x lautet:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Sie gibt die Steigung der Schnittkurve in x-Achsenrichtung an. y ist wie eine Konstante zu betrachten

b) Die erste partielle Ableitung der Funktion $z = f(x,y)$ nach der Variablen y lautet:

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Sie gibt die Steigung der Schnittkurve in y-Achsenrichtung an. x ist wie eine Konstante zu betrachten

Im Gegensatz zur Ableitung einer Funktion mit einer unabhängigen Variablen bezeichnet man die partielle Ableitung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen nicht mehr mit f' bzw. $\frac{df}{dx}$, sondern mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. f_x (die Variable, nach der abgeleitet wird, steht als "Index")

(∂ = deutsches "D")

Die Bezeichnung f_x bzw. f_y wird von mir favorisiert

c) Def: Partielle Ableitungen bei Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Geg.: $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ Funktion mit n unabh. Var.

Die partielle Ableitung nach der i-ten Variablen x_i lautet:

$$f_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Beim Differenzieren nach der Variablen x_i werden alle andern Variablen wie Konstanten behandelt.

Bemerkungen:

Bei einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen gibt es zwei partielle Ableitungen 1. Ordnung

Bei einer Funktion mit n unabhängigen Variablen gibt es n partielle Ableitungen 1. Ordnung

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung sind jeweils wieder Funktionen mit n unabhängigen Variablen.

Def: Gradient einer Funktion mit n unabhängigen Variablen

Die n partiellen Ableitungen 1. Ordnung werden in einer Zeile oder in einer Spalte zusammengefaßt

$$\begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} & \cdots & f_{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

"Zeilenvektor"
$(1 \times n)$ - Matrix

"Spaltenvektor"
$(n \times 1)$ - Matrix

Diesen "Zeilenvektor" bzw. "Spaltenvektor" bezeichnet man als "der Gradient von f"

Schreibweise: grad $f(x)$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$

Bem: Existieren an einer Stelle $x = (x_1, \dots, x_n)$ alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung, so ist f an der Stelle x differenzierbar.

Bem: Da bei der Berechnung der partiellen Ableitungen 1. Ordnung alle bis auf eine Variable als konstant angesehen werden, wird die Differentiation von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen auf die Differentiation von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen zurückgeführt

Später werden wir sehen, dass alle Ableitungsregeln übertragen werden können.

Beispiele für die Berechnung partieller Ableitungen 1. Ordnung

1) $z = f(x,y) = e^{x \cdot y}$

"wie eine Konstante"

Vorgehen bei z_x : $z = e^{xy}$

$z_x = y \cdot e^{xy}$

"wie eine Konstante"

Vorgehen bei z_y : $z = e^{xy}$

$z_y = x \cdot e^{xy}$

2) $z = f(x,y) = x^n \cdot y^m$

Vorgehen bei z_x : $z = x^n y^m$

$z_x = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m = n \cdot y^m \cdot x^{n-1}$

Vorgehen bei z_y : $z = x^n \cdot y^m$

$z_y = m \cdot y^{m-1} \cdot x^n = m \cdot x^n \cdot y^{m-1}$

3) $z = f(x,y) = x \cdot \ln y$

$z_x = \ln y$ (es wird nach x abgeleitet, "ln y" Konstante

$z_y = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$ (hier wird ln y abgeleitet)

4) $z = f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$

$$z_x = \cos x \cdot \cos y \quad (\sin x \text{ wird abgeleitet})$$
$$z_y = -\sin y \cdot \sin x \quad (\cos y \text{ wird abgeleitet})$$

Bitte beachten Sie nochmals:

Bei der Berechnung der partiellen Ableitungen werden die übrigen unabhängigen Variablen, nach denen nicht differenziert wird, wie Konstanten behandelt, es handelt sich jedoch nicht um echte Konstanten, sondern nach wie vor veränderliche Variablen.

Die partielle Ableitung ist in jedem Punkt, in dem die Funktion differenzierbar ist, erklärt, und in der Regel selbst eine Funktion der unabhängigen Variablen.

Also bei einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen sind die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung auch Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen.

Schauen Sie nocheinmal auf die Skizze auf Blatt (11):

Die Steigung der Schnittkurve in Richtung x-Achse (y konstant) kann zwar in einem Punkt gemessen werden, wandert aber, wenn x verändert wird, entlang der Kurve, d. h. die Kurvengleichung beschreibt die Steigung in jedem Punkt dieser Kurve.

Dazu noch ein weiteres Bp.:

Gegeben: $z = f(x,y) = 2x \cdot y - 3x^2 + \frac{1}{y}$

Gesucht sind die Steigungen in Richtung x-Achse und in Richtung y-Achse im Punkt (2,1) der Definitionsebene.

Lösung: Gesucht sind zunächst die partiellen Ableitungen erster Ordnung.

$$z_x(x,y) = 2y - 6x \quad (\text{"}y\text{ konstant"})$$
$$z_y(x,y) = 2x - \frac{1}{y^2} \quad (\text{"}x\text{ konstant"})$$

Die beiden partiellen Ableitungen sind selbst wieder Funktionen von x und y.

Die gesuchten Steigungen für $x=2$ und $y=1$ erhält man durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen der partiellen Ableitung.

$$z_x(2,1) = 2\cdot 1 - 6\cdot 2 = -10$$
$$z_y(2,1) = 2\cdot 2 - \frac{1}{1^2} = 3$$
$$\text{grad } f(2,1) = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bem: Der Gradient kann als Vektor aufgefasst werden

Um schnell und sicher partiell ableiten zu können, muss man die Ableitungsregeln aus dem WS sicher beherrschen. Man muss sich auch ständig vor Augen führen, welches die Variable ist, nach der abgeleitet werden muss und welches die Variablen sind, die für den Moment konstant gehalten werden. Weiterhin muss man darauf achten, ob die Variable, nach der abgeleitet wird, in zwei Faktoren der Funktion auftaucht (→ Anwenden der Produktregel), ob sie in einer zusammengesetzten

Funktion erscheint (Kettenregel) oder ob sie im Zähler oder Nenner einer Funktion erscheint (Quotientenregel)

Fazit: Ableitungsregeln für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen müssen sicher beherrscht werden.

Anwenden einer Ableitungsregel, ja oder nein?

Bp.: 1) $z = f(x,y) = x^2 \cdot y$ keine Produktregel notwendig

$z_x = 2xy \quad z_y = x^2$

2) $z = f(x,y) = 4x^2 \cdot \sin x \cdot \cos y$

$z_x = 8x \cdot \sin x \cdot \cos y + 4x^2 \cdot \cos x \cdot \cos y$

da x im Faktor $4x^2$ und im Faktor $\sin x \cdot \cos y$ enthalten ist, muss die Produktregel

mit $u = 4x^2 \quad u' = 8x$

$v = \sin x \cdot \cos y \quad v' = \cos x \cdot \cos y$

angewendet werden

$z_y = 4x^2 \cdot \sin x \cdot (-\sin y) = -4x^2 \cdot \sin x \cdot \sin y$

hier braucht man keine Produktregel

3) $z = f(x,y) = y \cdot e^{x^2+y^2}$

$z_x(x,y) = 2x \cdot y \cdot e^{x^2+y^2}$ (Kettenregel)

$z_y(x,y) = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$

$= e^{x^2+y^2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2}$

(Kettenregel und Produktregel)

4) $z = f(x,y) = 3x^2 \cdot y^2 + x^6 + 3y^3$

$$z_x(x,y) = 6x \cdot y^2 + 6x^5$$

$$z_y(x,y) = 6x^2y + 9y^2$$

keine Produktregel notwendig

5) Jetzt mal eine Variable mehr

$$u(x,y,z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$u_x(x,y,z) = 2 \cdot e^{yz} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_y(x,y,z) = 2xze^{yz} + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2xze^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_z(x,y,z) = 2xye^{yz} + \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2xye^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Übungsaufgabe

$z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2xy} + 3x$

Bestimmen Sie die Werte des Gradienten für $(0,2)$ und $(1,-6)$

Lösung: $z_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2} - 2y \cdot e^{2xy} + 3$

$$z_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2xe^{2xy}$$

$$\text{grad}_f(0,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{grad}_f(1,-6) = \begin{pmatrix} 3.027 \\ -0.3243 \end{pmatrix}$$

Bem zu $\text{grad}_f(1,-6)$ $\quad z_x(1,-6) = \frac{2}{37} + 12 \cdot e^{-12} + 3$

$$z_y(1,-6) = -\frac{12}{37} - 2 \cdot e^{-12}$$

5) $z = f(x,y) = \dfrac{e^x \cdot \sin y}{e^y \cdot \cos x}$

Für die partiellen Ableitungen muss die Quotientenregel angewendet werden

$$z_x(x,y) = \frac{e^x \cdot \sin y \cdot e^y \cdot \cos x + e^x \sin y \cdot e^y \cdot \sin x}{(e^y \cdot \cos x)^2}$$

$u = e^x \sin y$
$u_x = e^x \sin y$
$v = e^y \cos x$
$v_x = -e^y \sin x$

$$z_y(x,y) = \frac{e^x \cdot \cos y \cdot e^y \cdot \cos x - e^x \sin y e^y \cos x}{(e^y \cdot \cos x)^2}$$

$u_y = e^x \cos y$
$v_y = e^y \cos x$

Auf die weitere Zusammenfassung wird hier verzichtet, da es nur um die korrekte Anwendung der Quotientenregel ging.

6) $z = f(x,y) = \sin(x \cdot y) + y \cdot e^{-x^2}$

$z_x(x,y) = y \cdot \cos(x \cdot y) + y \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$= y \cdot \cos(x \cdot y) - 2xy \cdot e^{-x^2}$

$z_y(x,y) = x \cdot \cos(x \cdot y) + e^{-x^2}$

Kettenregel

Die Beispiele haben Ihnen die verschiedenen Möglichkeiten gezeigt, bei den partiellen Ableitungen auf die Ihnen bekannten Ableitungsregeln (Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel) zurückzugreifen, da beim partiellen Ableiten immer alle bis auf eine Variable (die, nach der abgeleitet wird) konstant wird und somit das Ableiten auf das Ableiten einer Funktion mit einer Variablen zurückgeführt wird.

Bemerkung zum Gradienten einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen:

Fasst man den Gradienten als Vektor auf, so kann dieser Vektor für variable Werte $(x_1, \dots x_n)$ als "Vektorfunktion" aufgefasst werden. Betrachtet man diesen "Gradientenvektor" angeheftet am Punkt P mit $P(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots x_n))$, so "zeigt" der Vektor in die Richtung der maximalen Zuwachsrate der Funktion f, der Betrag vom Vektor ist dann die maximale Zuwachsrate.

Der Gradient kann also jedem Punkt zugeordnet werden (gut vorstellbar für $n=2$) und liefert, für verschiedene Punkte aufgezeichnet, ein sogenanntes Skalarfeld. Am Beispiel einer Höhenkarte einer Landschaft, liefert dieses Skalarfeld einen Überblick über die Richtungen der steilsten Anstiege.

Das führt hier schon weit in das Gebiet der Vektoranalysis hinein.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen $y = f(x)$ konnte die Ableitung $y' = f'(x)$ wieder abgeleitet werden: $y'' = f''(x)$. Voraussetzung war, dass die Funktion n-mal stetig differenzierbar war.

Dies kann auf die partiellen Ableitungen übertragen werden.