Frage: Welche Besonderheiten fallen Ihnen ein, wenn man die "zweite" Ableitung z.B. bei einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen $z = f(x,y)$ berechnen möchte?

Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x,y)$:

z_x $\quad$ z_y $\quad$ 2 Stück

z_x, z_y können jeweils nach x bzw. y abgeleitet werden

z_{xx} $\quad$ z_{xy} $\quad$ z_{yy} $\quad$ z_{yx} $\quad$ 4 Stück

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung sind wiederum eine Funktion mit (hier) zwei Variablen, diese können wieder partiell nach der einen oder anderen Variablen abgeleitet werden.

z_{xx}, z_{yy} zweimal nach derselben Variablen abgeleitet: direkte Ableitungen

Bem. z_{xx} immer gleich groß

z_{xy}, z_{yx} gemischte Ableitungen

Frage: Geg.: $z = f(x,y)$
Wieviele partielle Ableitungen 3. Ordnung gibt es?

Antwort: die 4 partiellen Ableitungen 2. Ordnung können jeweils nach x bzw. y abgeleitet werden, also 8 partielle Ableitungen dritter Ordnung.

Frage: Geg.: $z = f(x_1 \ldots x_n)$ Funktion mit n unabhängigen Variablen

Wieviele partielle Ableitungen 2. Ordnung gibt es?
Wieviele partielle Ableitungen m-ter Ordn. gibt es?

Antwort: Es gibt n^2 partielle Ableitungen 2. Ordnung
Es gibt n^m partielle Ableitungen m-ter Ordnung.

Def: Geg. $z = f(x,y)$
Dann heißen

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

und $$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(f_y(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

die direkten Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

und $$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(f_y(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

die gemischten Ableitungen 2. Ordnung

Es wird vereinbart, dass wir die "Indexschreibweise" f_{xx}, f_{xy}, etc. verwenden und nicht die $\frac{\partial f}{\partial x}$-Schreibweise.

Die Definition für Funktionen mit n unabhängigen Variablen lautet entsprechend.

Schreibweise für partielle Ableitungen höherer Ordnung – Beispiel

$$f_{xyz}(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

partielle Ableitung dritter Ordnung
Reihenfolge "von links nach rechts",
also nach x, nach y und nach z

Bei der Berechnung von partiellen Ableitungen höherer Ordnung erleichtert[?] Ihnen folgender Satz, der nicht bewiesen wird, erheblich die Rechnung:

Satz von Schwarz

Ist eine Funktion f mit n unabhängigen Veränderlichen m-mal stetig differenzierbar, so sind die gemischten partiellen Ableitungen m-ter Ordnung unabhängig von der Reihenfolge des Differenzierens alle gleich.

Bp: $z = f(x,y) = x^2 \cdot y + 2x^5 \cdot y$

$z_x(x,y) = 2xy + 10x^4 y \qquad z_{xx}(x,y) = 2y + 40x^3 y$

$z_y(x,y) = x^2 + 2x^5 \qquad z_{yy}(x,y) = 0$

$z_{xy}(x,y) = 2x + 10x^4$

$z_{yx}(x,y) = 2x + 10x^4$

Die Darstellung der n partiellen Ableitungen 1. Ordnung erfolgte zusammengefasst in einem Vektor, dem Gradienten der Funktion.

Die n^2 partiellen Ableitungen 2. Ordnung werden in einer Matrix zusammengefasst:

Def: Ist $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal partiell differenzierbar nach $x_1 \dots x_n$, so heißt die Matrix $H(x)$ mit $(x = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{n\text{-Tupel}})$

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

die **Hesse'sche Matrix** von f an der Stelle $x = (x_1, \dots x_n)$

andere Bezeichnungen:

Jacobi'sche Matrix

Funktionalmatrix

Frage: Welche Eigenschaft hat $H(x)$, wenn Sie an den Satz von Schwarz denken?

Antwort: $H(x)$ ist symmetrisch

Beispiele:

1) $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 \cdot x_3 + x_3$

Aufstellen der Hesse-Matrix

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2$$
$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_2x_3 \qquad \operatorname{grad}_f = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2x_3 \\ x_2^2+1 \end{pmatrix}$$
$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 1$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{x_1x_1} = 6x_1 \qquad f_{x_1x_2} = 0 \qquad f_{x_1x_3} = 0$$

$$f_{x_2x_1} = 0 \qquad f_{x_2x_2} = 2x_3 \qquad f_{x_2x_3} = 2x_2$$

$$f_{x_3x_1} = 0 \qquad f_{x_3x_2} = 2x_2 \qquad f_{x_3x_3} = 0$$

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soll der Wert des Gradienten bzw. der Wert der Hesse-Matrix an einer ganz bestimmten Stelle berechnen, so setzt man diese Werte in grad_f bzw. $H(x)$ ein. Für $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ ergibt sich

$$\operatorname{grad}_f(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad H(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bem: $H(1,-1,-1)$ symmetrisch (Satz von Schwarz)

2) $f(x,y) = 3x^5y^4 + 2x^3y^2 + x^2 + 3$

$$f_x(x,y) = 15x^4y^4 + 6x^2y^2 + 2x \qquad \text{grad}_f = \begin{pmatrix} 15x^4y^4 + 6x^2y^2 + 2x \\ 12x^5y^3 + 4x^3y \end{pmatrix}$$

$$f_y(x,y) = 12x^5y^3 + 4x^3y$$

$$f_{xx}(x,y) = 60x^3y^4 + 12xy^2 + 2$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 60x^4y^3 + 12x^2y$$

$$f_{yy}(x,y) = 36x^5y^2 + 4x^3$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 60x^3y^4 + 12xy^2 + 2 & 60x^4y^3 + 12x^2y \\ 60x^4y^3 + 12x^2y & 36x^5y^2 + 4x^3 \end{pmatrix}$$

3) $f(x,y) = \sin(x \cdot y) + y \cdot e^{-x^2}$

$$f_x(x,y) = y \cdot \cos(x \cdot y) - 2xy \cdot e^{-x^2} \qquad \text{grad}_f = \begin{pmatrix} y \cdot \cos(x \cdot y) - 2xye^{-x^2} \\ x \cdot \cos(x \cdot y) + e^{-x^2} \end{pmatrix}$$

$$f_y(x,y) = x \cdot \cos(x \cdot y) + e^{-x^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = -y^2 \sin(x \cdot y) - 2ye^{-x^2} + 4x^2ye^{-x^2}$$ (Produktregel für den zweiten Summanden)

$$f_{yy}(x,y) = -x^2 \cos(xy)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) - 2xe^{-x^2}$$

Auf die Darstellung dieser Ableitungen 2. Ordnung in einer Hesse-Matrix wird hier verzichtet.

Interpretation der partiellen Ableitungen 2. Ordnung bei Funktionen mit 2 unabhängigen Variablen

f_x : Steigung der Schnittkurve in x-Achsenrichtung

f_y : Steigung der Schnittkurve in y-Achsenrichtung

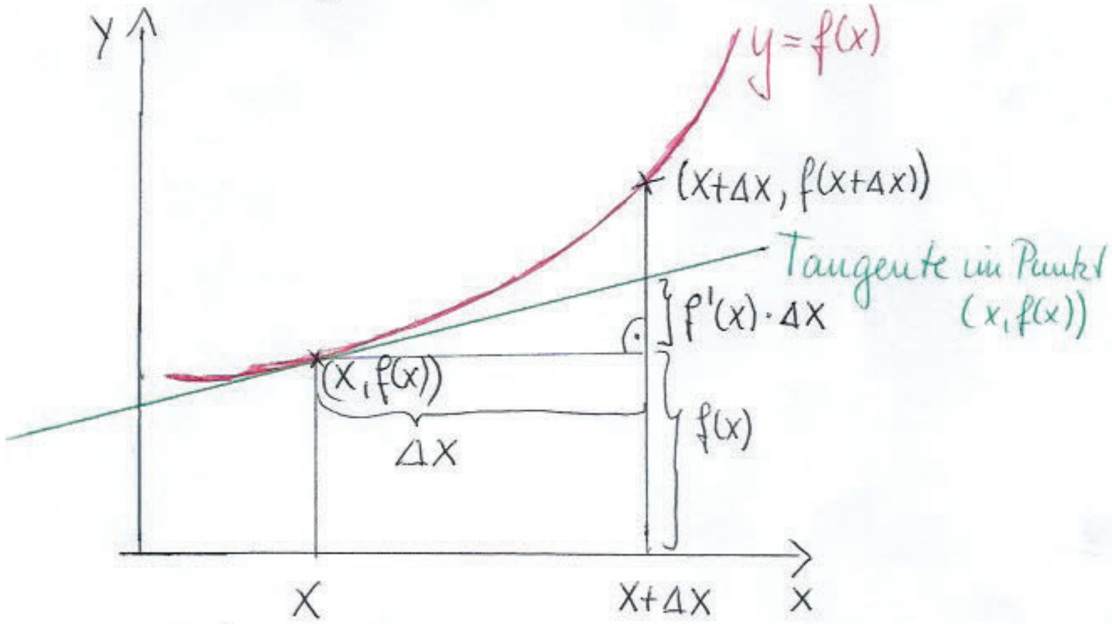
f_{xx} : Krümmung der Schnittkurve in x-Achsenrichtung

f_{yy} : Krümmung der Schnittkurve in y-Achsenrichtung

Partielles und totales Differential

Mit dem bisher Besprochenen über Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen soll nun beschrieben werden, wie sich der Funktionswert einer solchen Funktion an einem Punkt für kleine Veränderungen der Variablen verhält.

Wdh: Das Differential einer Funktion mit einer unabhängigen Veränderlichen



$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$ Differentialquotient

Von x geht man um Δx nach rechts : $x+\Delta x$

Der zu $x+\Delta x$ gehörende Funktionswert ist $f(x+\Delta x)$

Auf der Tangente am Punkt $(x, f(x))$ ist der zugehörige Funktionswert $f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$ ($f'(x)\cdot\Delta x$ ergibt sich aus der Definition der Steigung)

Die Werte $f(x+\Delta x)$ und $f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$ unterscheiden sich umso weniger, je kleiner Δx wird.

Es gilt : $f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$

Man hat f "linearisiert"

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x+\Delta x) - f(x) \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$= f'(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

Man setzt $df = f'(x) \cdot dx$

df heißt das Differential der Funktion $y = f(x)$

dx heißt das Differential der Variablen x

$f'(x) = \frac{df}{dx}$ Differentialquotient (bekannt aus dem WS)

In Worten: Das Differential ist die infinitesimal kleine Wirkung df (oder dy) der infinitesimal kleinen Änderung dx der Variablen x

(infinitesimal = unendlich klein)

Überträgt man diese Kenntnis auf Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen, so kommt man zum Begriff des partiellen Differentials.

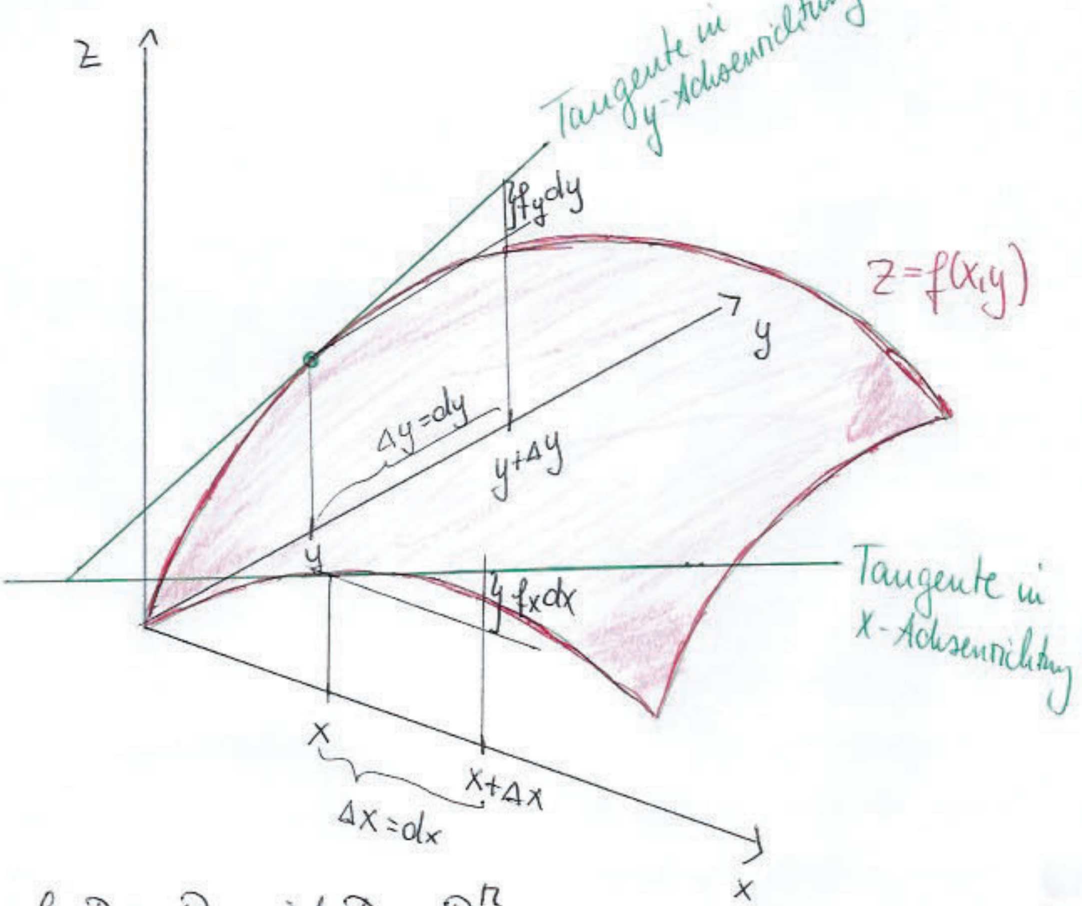
Geg.: $z = f(x,y)$

f_x: Steigung der Schnittkurve in x-Achsenrichtung

Eine Auslenkung der Variablen x um den infinitesimal kleinen Betrag dx hat auf die Schnittkurve in x-Achsenrichtung die angenäherte Funktionswertänderung $dz_x = f_x \cdot dx$ zur Folge.

Eine Auslenkung der Variablen y um den infinitesimal kleinen Betrag dy hat auf die Schnittkurve in y-Achsenrichtung die angenäherte Funktionswertänderung $dz_y = f_y \cdot dy$ zur Folge.

Der Begriff des Differentials wurde jeweils auf die Schnittkurven in x- und y-Achsenrichtung übertragen. Man spricht nun von partiellen Differentialen.



Def. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$y = f(x_1, \ldots, x_n)$

Das partielle Differential der Funktion f nach der Variablen x_i lautet: $d_{x_i} f = f_{x_i}\, dx_i$

$(i = 1, \ldots, n)$

Man hat also die Linearisierung in alle "Richtungen", was für den Fall $n=2$ (s. Skizze oben) noch vorstellbar ist, für $n>2$ nicht mehr.

Das totale Differential einer Funktion

Fragestellung:
Wie ändert sich der Funktionswert einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen für kleine Veränderungen der Variablen? Für $n=2$ Variablen lautet die Frage: Wie ändert sich die Höhenkoordinate des Punktes $P(x, y, f(x,y))$ bei einer kleinen Änderung von x und y auf der Fläche selbst bzw. auf der Tangentialebene?

Dazu machen wir ein paar geometrische Vorbetrachtungen

1) $y=f(x)$ Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$
(vgl. Skizze Blatt 27)

Allg. Geradengleichung: $y=mx+b$
Im Berührpunkt stimmen Steigung der Kurve und Steigung der Tangente überein:

$$y' = f'(x_0) = m$$

Also: $y_0 = mx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - mx_0 = y_0 - f'(x_0)x_0$

$$y = f'(x_0)\cdot x + y_0 - f'(x_0)\cdot x_0$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = f'(x_0)\cdot x - f'(x_0)\cdot x_0$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Genauso leiten wir die Gleichung der Tangentialebene in einem Punkt $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ her.

Allgemeine Form der Ebenengleichung:

$$z = ax + by + c$$

Im Berührpunkt stimmen die Steigungen der beiden Schnittkurven (partielle Ableitungen) und die Steigung der Tangentialebene (partielle Ableitungen) überein.

Die partiellen Ableitungen der Tangentialebene:

$$z_x = a$$
$$z_y = b$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion:

$$f_x(x,y)$$
$$f_y(x,y)$$

Im Berührpunkt $P(x_0, y_0, z_0)$ gilt:

$$a = f_x(x_0, y_0)$$
$$b = f_y(x_0, y_0) \quad *$$

Der Berührpunkt $P(x_0, y_0, z_0)$ liegt auch auf der Tangentialebene, erfüllt auch die Gleichung dieser

$$z_0 = a x_0 + b y_0 + c$$
$$\Rightarrow c = z_0 - a x_0 - b y_0$$
$$\underset{*}{\Rightarrow} c = z_0 - f_x(x_0, y_0)\, x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0$$

Damit ist:

$$z = f_x(x_0, y_0) \cdot x + f_y(x_0, y_0) \cdot y + z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0$$

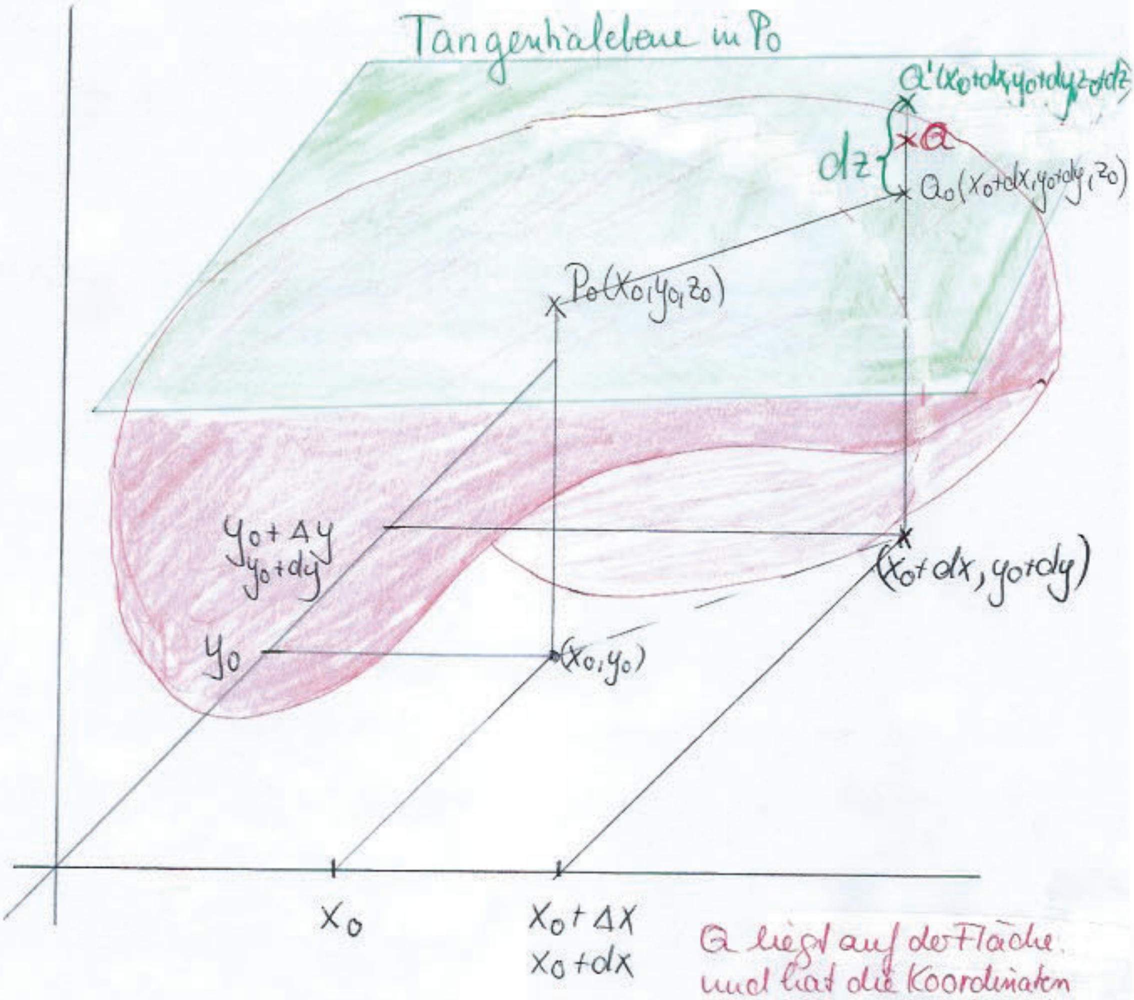
Umformen liefert:

$$z = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) + z_0$$

bzw.

$$(z - z_0) = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

Wie ändert sich die Höhenkoordinate der Funktion $z = f(x,y)$ annähernd bei kleinen Änderung von x und y?



Q liegt auf der Fläche und hat die Koordinaten $Q(x_0+dx, y_0+dy, f(x_0+dx, y_0+dy))$

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Zuwachs auf der Fläche

Eingesetzt in die Gleichung der Tangentialebene:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x_0+\Delta x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y_0+\Delta y - y_0)$$

$$z - z_0 = dz$$

$$dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$$

$Q_0(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0)$ (s. Skizze)

dz ist der Abstand von Q_0 und Q' (s. Skizze auf der Tangentialebene)

Für sehr kleine Änderungen von dx und dy gilt $dz \approx \Delta z$

Man kann also, wenn dx, dy und dz hinreichend klein sind, die Fläche in der Umgebung des Berührpunktes durch den unmittelbar darüber (oder darunter) liegenden zugehörigen Punkt auf der Tangentialebene ersetzen.

Wie bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen kann man auch hier von einer <u>Linearisierung der Funktion</u> sprechen.

Aus dem Begriff des Differentials wird der Begriff des totalen oder vollständigen Differentials.

<u>Def:</u> Das <u>totale oder vollständige Differential</u> einer Funktion $z = f(x,y)$ (2 unabh. Variablen) ist der <u>lineare Differentialausdruck</u>

$$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

Die Definition kann auf Funktionen mit n unabh. Variablen erweitert werden

<u>Def:</u> Das <u>totale oder vollständige Differential</u> einer Funktion $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ (n unabh. Var.) ist der <u>lineare Differentialausdruck</u>

$$dz = f_{x_1}\,dx_1 + f_{x_2}\,dx_2 + \ldots + f_{x_n}\,dx_n$$

Das totale Differential ist eine Funktion mit den n unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und den Differentialen $dx_1, \ldots, dx_n$

Es ist die Summe der partiellen Differentiale für die unabhängigen Variablen $x_1, \dots, x_n$.

Das totale Differential ist eine Näherung für die Änderung des Funktionswertes, wenn sich die unabhängigen Variablen nur geringfügig ändern.

Noch einmal: Linearisierung der Funktion

Eine geometrische Deutung des totalen Differentials ist bei Funktionen mit mehr als zwei unabhängigen Variablen nicht mehr möglich.

Beispiele:

Vorbem.: Im folgenden Beispielen nehmen wir eher grobe Veränderungen der unabhängigen Variablen vor und vergleichen jeweils mit der wahren Funktionswertänderung, nur um zu verdeutlichen, dass durch die Linearisierung der Funktion mittels des totalen Differentials die Abschätzung immer weniger richtig ist.

1) $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot dx + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot dy$$ totale Differential

weiter Bp 1)

Der Punkt P in der x-y-Ebene mit $P(2,1)$ soll verschoben werden in den Punkt $P^*(2{,}5; 1{,}75)$

$dx = 0.5$ und $dy = 0.75$ (ergibt sich aus der Differenz der jeweiligen Koordinaten)

Näherungsweise Veränderung der Höhenkoordinate:

$$dz = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1^2} \cdot 0.5 + \frac{2 \cdot 1}{2^2+1^2} \cdot 0.75$$

($x=2, y=1, dx=0.5, dy=0.75$ eingesetzt)

$$dz = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

Man vergleicht nun mit der wahren Funktionswertdifferenz:

$$\Delta z = \left| f(2,1) - f(2{,}5; 1{,}75) \right|$$

Betrag, da nur die absolute Änderung von Interesse

$$= \left| \ln(4+1) - \ln(2.5^2 + 1.75^2) \right|$$

$$= \left| \ln 5 - \ln 9.312 \right|$$

$$= \left| 1.609 - 2.2314 \right| = 0.62$$

Die über das totale Differential erhaltene angenäherte Funktionswertänderung hat zur wahren Funktionswertänderung lediglich eine Differenz von 0.08, ist also schon sehr nahe dran.