

2) Geg: $P(x,y,z)$ ein Punkt im dreidimensionalen Raum.

durch $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ wird der Abstand eines Punktes zum Koordinatenursprung beschrieben.

Wie ändert sich der Abstand des Punktes $A(1,2,0)$, wenn er nach $B(0,9; 2,2, -0,1)$ verschoben wird. Dies soll näherungsweise durch das totale Differential berechnet werden.

$$dr = r_x(x,y,z) \cdot dx + r_y(x,y,z) \cdot dy + r_z(x,y,z) \cdot dz$$

$$dx = -0,1 \quad dy = 0,2 \quad dz = -0,1$$

$$r_x(x,y,z) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_y(x,y,z) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_z(x,y,z) = \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_x(1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$r_y(1,2,0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$r_z(1,2,0) = 0$$

$$dr = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-0,1) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0,2 + 0 \cdot (-0,1)$$

$$\approx 0,1342$$

Die reale Abstandsänderung beträgt:

$$\Delta r = |r(1,2,0) - r(0.9; 2,2; -0.1)|$$

$$= |\sqrt{5} - \sqrt{5.66}| = 0.143$$

Übungsaufgaben für zu Hause:

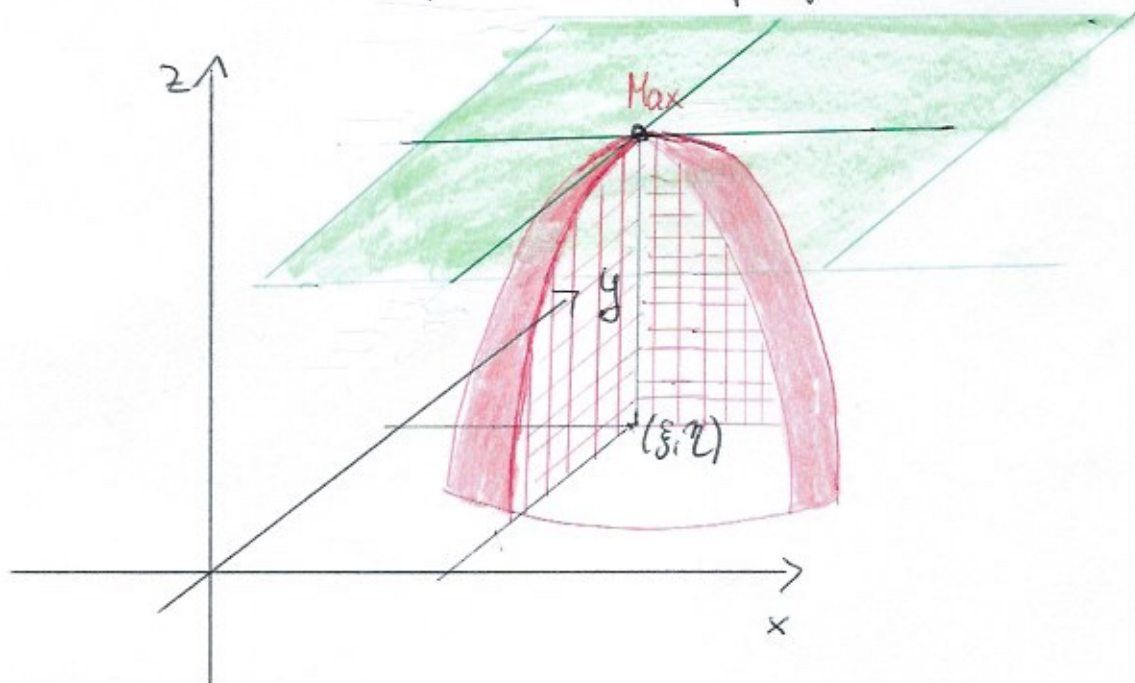
Berechnen Sie das totale Differential der Funktion

a) $z(x,t) = \frac{t^2 + x}{2t - 4x}$

b) $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Bereits definiert (Blatt 7) wurde, wie ein Minimum bzw. Maximum einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen (vorstellbar für $n=2$) aufzufassen ist.



Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man, ähnlich wie bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen, Bedingungen aufstellen, die erfüllt sein müssen, wenn ein Minimum bzw. Maximum nachgewiesen werden soll.

Formulierung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen

Notwendige Bedingung (aus Skizze Blatt 37 (Max.) abzulesen)

die Tangentialebene verläuft im Bereich des Maximums parallel zur x - y -Ebene, d.h. sämtliche Geraden der Tangentialebene haben die Steigung 0, insbesondere auch die beiden Tangenten an die Schnittkurven.

Das bedeutet: Die partiellen Ableitungen in einem

Maximum müssen den Wert 0 annehmen.
oder Minimum

Mathematische Formulierung:

Geg. $z = f(x, y)$ zwei unabh. Variablen

Notwendige Bedingung für einen Extremwert für (x_0, y_0) : $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$

$z = f(x_1, \dots, x_n)$ n unabh. Variablen

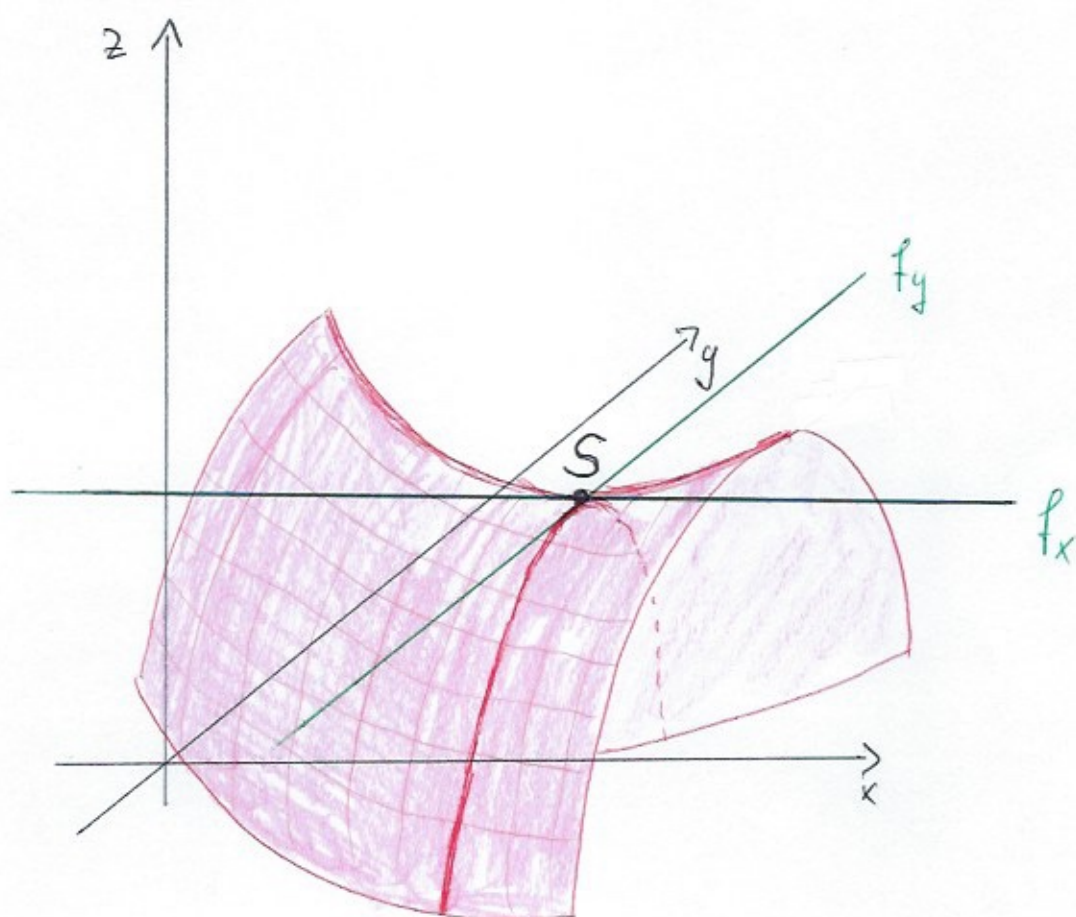
Notwendige Bedingung für einen Extremwert für $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = x^*$:

$$f_{x_1}(x^*) = f_{x_2}(x^*) = \dots = f_{x_n}(x^*) = 0$$

man sagt: sämtliche partielle Ableitungen
"verschwinden"

Durch das **Auswerten der notwendigen Bedingungen** erhält man **mögliche Kandidaten** für einen Extremwert.

Es gibt Flächenpunkte, in denen die partiellen Ableitungen "verschwinden", ohne dass ein Extremwert (Minimum oder Maximum) vorliegt. (39)



Die Schnittkurve im Punkt S parallel zur x - z -Ebene (y -Koord. von S fest) hat in S ein Minimum, die Schnittkurve im Punkt S parallel zur y - z -Ebene (x -Koord. von S fest) hat in S ein Maximum. Die Tangenten verlaufen waagrecht, d. h. die partiellen Ableitungen "verschwinden" ($=0$) und es handelt sich nicht um ein Minimum bzw. ein Maximum. Man spricht hier von einem Sattelpunkt.

Erinnerung: $y = f(x)$ Maximum in $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$
 $f''(x) < 0$

Minimum in $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$
 $f''(x_0) > 0$

Auch bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen, geht die Entscheidung über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.

Die Herleitung der hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Minimums bzw. Maximums ist sehr umfangreich, daher werden an dieser Stelle nur die Bedingungen formuliert.

Geg.: $z = f(x, y)$

$z = f(x, y)$ besitzt an der Stelle (x_0, y_0) einen Extremwert

$$\Leftrightarrow 1) \quad f_x(x_0, y_0) = 0 \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

notwendige Bedingungen

$$2) \quad \Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

hinreichende Bedingung

Ist $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, so liegt ein relatives Maximum vor.

Ist $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, so liegt ein relatives Minimum vor.

Bem. Die Bedingung aus 2) lässt sich auch als Determinante darstellen, man spricht von der Hesse'schen Determinante.

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Bem.: In 2) kann man $f_{xy}^2(x_0, y_0)$ schreiben, da aus dem Satz von Schwarz die Gleichheit der gemischten Ableitungen folgt.

Bem.: Falls $\Delta(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Falls $\Delta(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ keine Entscheidung möglich.

Es sollen nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Funktionen mit n unabhängigen Variablen formuliert werden.

Geg. $z = f(x_1, \dots, x_n)$ Funktion mit n unabh. Variablen

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ist Extremwert $\Leftrightarrow$

1) $\text{grad} f(\bar{x}) = 0$

notwendige Bedingung: sämtliche partiellen Ableitungen 1. Ordnung "verschwinden"

2) Sei $H(\bar{x})$ die Hesse'sche Matrix der 2. partiellen Ableitungen (= Funktionalmatrix)

$$H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & f_{x_1 x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\bar{x}) & \dots & \dots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist symmetrisch (Satz von Schwarz)

Sei $H_i = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_i}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_i x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_i x_i}(\bar{x}) \end{vmatrix} \quad i = 1, \dots, n$

die Hauptunterdeterminante, das ist die Determinante derjenigen Matrix, die man erhält, wenn man die letzten $(n-i)$ Zeilen und Spalten der Hesse'schen Matrix streicht.

Dann gilt:

$\bar{x}$ lokales Maximum $\Leftrightarrow H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, \dots$

$$H_n \begin{cases} < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\bar{x}$ lokales Minimum $\Leftrightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, \dots, H_n > 0$

Betrachtet man diese Kriterien für den Fall $n=2$ (zwei unabhängige Variablen), so erhält man die bereits notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die auf Blatt (40) formuliert wurden.

Prüfen Sie nach!

Sind für einen möglichen Kandidaten $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ die genannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen nicht erfüllt, so bedeutet das nicht, dass die Funktion sicher keinen Extremwert besitzt, sondern man kann nur mit den formulierten Kriterien keine Aussage treffen.

Beispiele

1) Gesucht sind die Extremwerte und Sattelpunkte der Funktion $z = f(x, y) = x^3 - 12x \cdot y + 6y^2$

notwendige Bedingungen auswerten (liefern "Kandidaten")

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 12y = 0$$

$$f_y(x, y) = -12x + 12y = 0$$

$$\text{I } 3x^2 - 12y = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12y$$

$$\text{II } -12x + 12y = 0 \Leftrightarrow 12x = 12y \Leftrightarrow x = y \quad *$$

$$* \text{ in I: } 3x^2 = 12x \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 12) = 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 4$$

Damit sind $(0,0)$ und $(4,4)$ Kandidaten für Extremwerte bzw. Sattelpunkte

hinreichende Bedingungen auswerten

Berechnen der partiellen Ableitungen 2. Ordnung und der Hesse'schen Determinante

$$f_{xx}(x,y) = 6x \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -12 \quad f_{yy}(x,y) = 12$$

$$A(x,y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 6x \cdot 12 - (-12)^2 = 72x - 144$$

$$A(0,0) = -144 \Rightarrow \text{Sattelpunkt bei } (0,0)$$

$$A(4,4) = 144 > 0 \text{ Extremwert bei } (4,4)$$

$$f_{xx}(4,4) = 6 \cdot 4 = 24 \Rightarrow \text{Minimum bei } (4,4)$$

Übungsaufgabe für das Selbststudium

Gesucht werden die Extremstellen und Sattelpunkte

der Funktion $f(x,y) = x - 8y - x^2 + x \cdot y - y^2$

(Lösung: Maximum bei $(-2, -5)$)

2) Gesucht werden die Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$

notwendige Bedingungen auswerten:

$$\text{I} \quad f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1^2 - 3)e^{x_1^3 - 3x_1} = 0$$

$$\text{II} \quad f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{III} \quad f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 2x_3 + 3 = 0$$

Auswerten des Gleichungssystems (Gleichungen I-III)

$$\text{Aus I: } 3x_1^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{11} = 1, x_{12} = -1 \quad (e\text{-Fkt. nicht } \neq 0)$$

Aus II und III:

$$-2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{II}$$

$$x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \quad \text{III}$$

$$\text{II} + 2 \cdot \text{III} : -3x_3 + 6 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2$$

$$x_3 = 2 \text{ in II} : -2x_2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1$$

Kandidaten sind also die dreidimensionalen Punkte.

$$x_{E_1} = (1, 1, 2) \text{ und } x_{E_2} = (-1, 1, 2)$$

hinreichende Bedingungen auswerten:

$$f_{x_1 x_1} = 6x_1 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} + (3x_1^2 - 3)^2 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} \quad (\text{Produktregel, Kettenregel})$$

$$f_{x_1 x_2} = 0 \quad f_{x_1 x_3} = 0 \quad f_{x_2 x_1} = 0 \quad f_{x_2 x_2} = -2$$

$$f_{x_2 x_3} = 1 \quad f_{x_3 x_1} = 0 \quad f_{x_3 x_2} = 1 \quad f_{x_3 x_3} = -2$$

Um die Hauptminoren auszuwerten, benötigt man lediglich noch die Werte der partiellen Ableitung 2. Ordnung $f_{x_i x_j}$ für die Kandidaten. (alle anderen sind von den Variablen unabhängig)

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_1}(1, 1, 2) &= 6 \cdot 1 \cdot e^{1^3 - 3} + (3 \cdot 1^2 - 3)^2 \cdot e^{1^3 - 3} \\ &= 6e^{-2} + 0 \cdot e^{-2} = 6e^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_1}(-1, 1, 2) &= 6 \cdot (-1) \cdot e^{(-1)^3 - 3(-1)} + (3 \cdot (-1)^2 - 3)^2 \cdot e^{(-1)^3 - 3(-1)} \\ &= -6e^2 + 0 \cdot e^2 = -6e^2 \end{aligned}$$

$$H_3(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\uparrow}{=} 6e^{-2} \cdot (4 - 1) = 18e^{-2} > 0$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

$$H_2(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12e^{-2} < 0$$

$$H_1(1, 1, 2) = |6e^{-2}| > 0$$

Es gilt für $x_{E_1} = (1, 1, 2)$: $H_3 > 0$, $H_2 < 0$, $H_1 > 0$

Da $H_2 < 0$, kann über die Art des Extremwertes bei x_{E_1} keine Aussage getroffen werden.

$$H_3(-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6e^2(4-1) = -18e^2 < 0$$

$$H_2(-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12e^2 > 0$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

$$H_1(-1, 1, 2) = |-6e^2| < 0$$

Es gilt für $x_{E_2} = (-1, 1, 2)$: $H_3 < 0$, $H_2 > 0$, $H_1 < 0$

Die Funktion besitzt an der Stelle $x_{E_2} (-1, 1, 2)$ ein lokales Maximum. (s. Blatt (42))

Der Nachweis über die Art des Extremwertes über die Hauptunterdeterminanten der Hesse'schen Matrix wird, je mehr unabhängige Variablen die Funktion besitzt, immer aufwändiger.

Schon die Kandidaten zu bestimmen kann sehr aufwändig sein, da die Auswertung der notwendigen Bedingung nicht immer auf ein lineares Gleichungssystem führt.