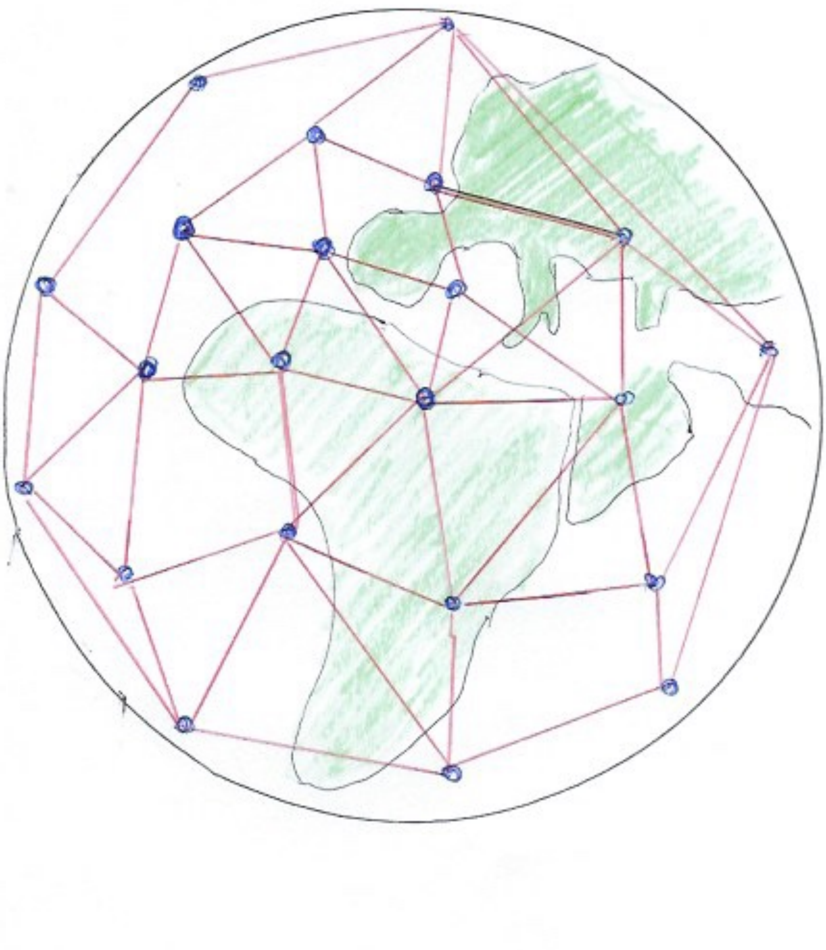
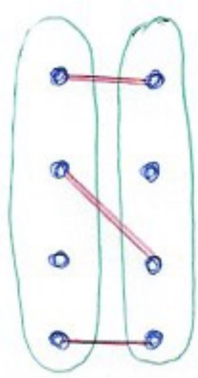
Graphentheorie

Routenplanung



Globales Datennetz



Matching

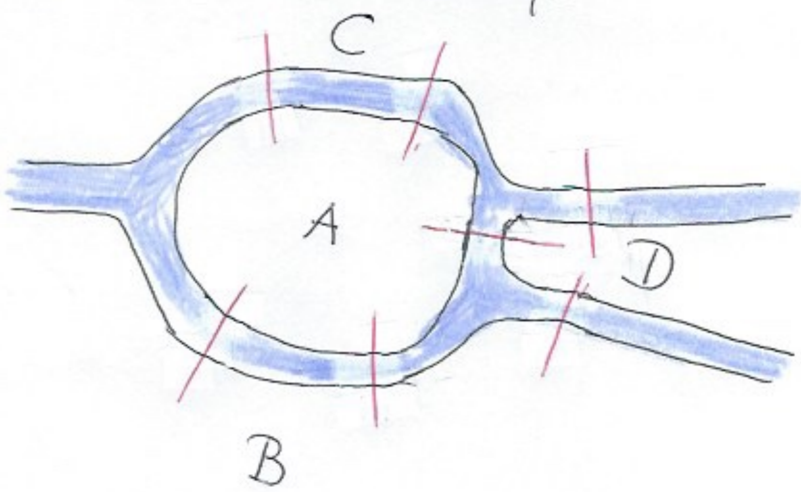
Routenplanung, Datennetze, Aufsuchen kürzester Wege, Aufsuchen schnellster Wege, Zuordnung Arbeitsuchende zu offenen Stellen (ein Beispiel für Matching), das können alles Themen sein, die man mit den Erkenntnissen der Graphentheorie, einem Teilgebiet der Mathematik, lösen kann.
Diese Anwendungen können aus dem Bereich der Biologie, Soziologie, Psychologie, der Informatik oder der Wirtschaftswissenschaften sein, um nur einige zu nennen.
Überall in den genannten Disziplinen, beispielhaft bei den auf Blatt 75 genannten Fällen, treten Systeme mit Objekten und Beziehungen zwischen diesen Objekten auf. Die Graphentheorie ist ein besonders elegantes und ein in den Grundlagen leicht zu verstehendes Hilfsmittel zur Lösung von Problemstellungen wie das Aufsuchen kürzester Wege etc.
Graphen zur anschaulichen Darstellung von mathematischen Sachverhalten kennen Sie aus Schule und Studium:

- Pfeildiagramme zur Beschreibung von Relationen, Abbildungen und Funktionen
- Gozintographen ("The part that goes into") zur Darstellung von Produktionsabläufen
(Erinnerung: Der Gozintograph wurde als Matrix dargestellt, darauf kommen wir zurück!)

Ziel: Entwicklung von Algorithmen, um in einem Graphen z.B. die kürzesten Wege, die kostenminimalsten Verbindungen, Rundweg etc. zu ermitteln.

Historisches Beispiel

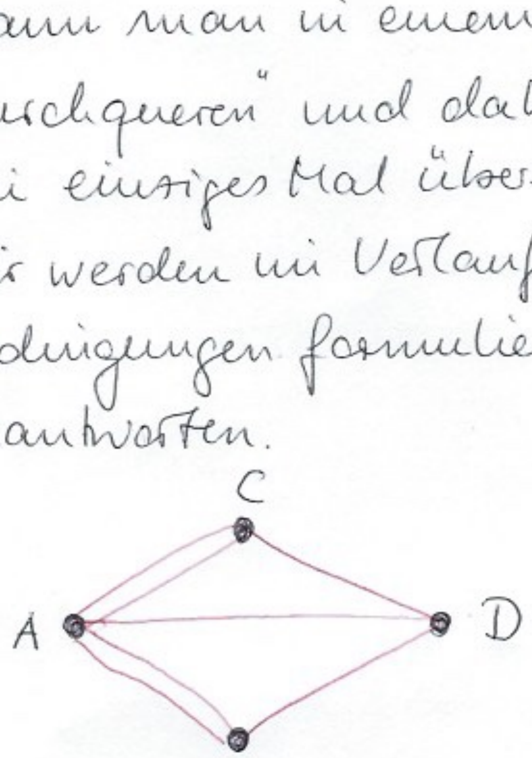
Den Beginn der Graphentheorie kann man dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) zuschreiben. Euler befand sich um 1736 herum in Königsberg, die Stadt war damals durch den Fluß Pregel, der in der Stadt aus dem "alten" und "neuen" Pregelfluss zusammenfließt und dabei auch noch eine Insel umschließt:



der historischen Skizze von L. Euler nachempfunden

Euler formulierte das Königsberger Brückenproblem: Kann man in einem einzigen Rundgang die Stadt "durchqueren" und dabei jede der sieben Brücken nur ein einziges Mal überschreiten?

Wir werden im Verlaufe dieser Vorlesung notwendige Bedingungen formulieren und damit Euler's Problem beantworten.



Abstraktion der Skizze oben:

Stadtteile sind die "Knoten"
Brücken sind die "Kanten"
des "Graphen"

Grundbegriffe

Def.: (Graph)

Ein Graph besteht aus einer Menge $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ von Knoten, einer Menge K von Kanten und einer Abbildung v, die jeder Kante $k \in K$ eindeutig zwei Elemente aus M zuordnet. Das "Paar" von Knoten, das einer Kante zugeordnet wird, kann ungeordnet ($\{x_i, x_j\}$ Darstellung in geschweiften Klammern) oder geordnet ((x_i, x_j) Darstellung in runden Klammern = geordnetes Paar) sein.

Das Tripel $G = (M, K, v)$ heißt Graph.

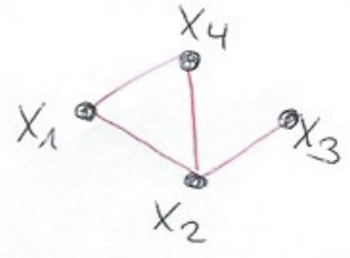
Sind die Knotenpaare (x_i, x_j) geordnet, dann heißt der Graph "gerichteter Graph" oder "Digraph", ansonsten heißt der Graph ungerichtet oder gewöhnlich.

Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen adjazent oder benachbart.

Man kann auch von adjazenten Kanten sprechen, wenn sie wenigstens einen Knoten gemeinsam haben.

Die Kante, die zwei Knoten verbindet, ist mit diesen Knoten inzident.

Anschaulich werden die Knoten als Punkte in der Ebene, die Kanten als Verbindungslinie dargestellt.



Bp.: $G = (M, K, v)$ mit $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$

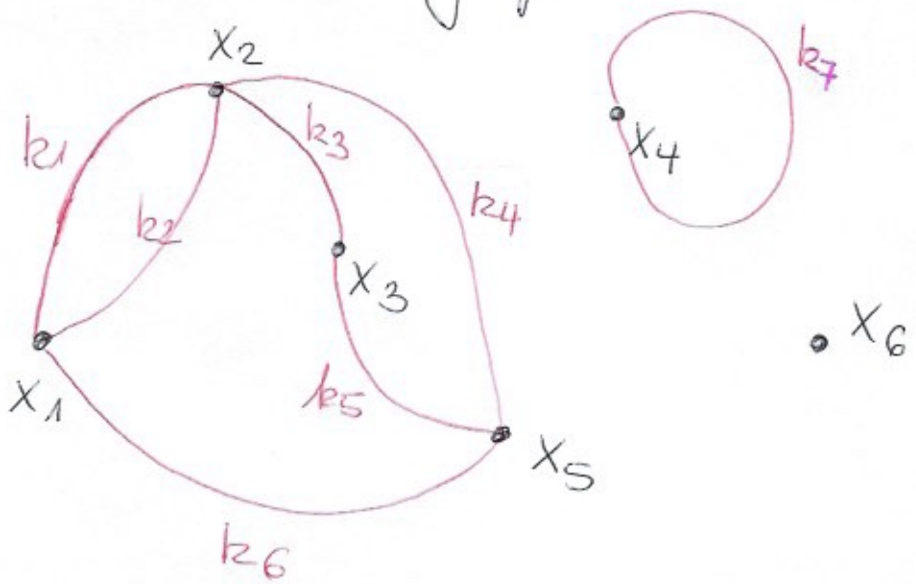
$v(k_1) = \{x_1, x_2\}$ $v(k_2) = \{x_1, x_2\}$

$v(k_3) = \{x_2, x_3\}$ $v(k_4) = \{x_2, x_5\}$

$v(k_5) = \{x_3, x_5\}$ $v(k_6) = \{x_1, x_5\}$

$v(k_7) = \{x_4, x_4\}$

Zeichnen Sie den Graphen:



Mehrfachkante zwischen x_1 und x_2

Schlinge bei x_4 Schlinge wird manchmal auch Schleife genannt.

x_6 **isolierter** Knoten

Frage: Was ändert sich im Graphen, wenn statt der geschweiften Klammern runde Klammern stehen?

Antwort: Aus dem ungerichteten Graphen wird ein gerichteter Graph, ein Digraph.

Def.: (Knotengrad in ungerichteten Graphen)

Die Anzahl der mit einem Knoten x_i inzidenten Kanten heißt der Grad des Knotens.

Schreibweise: $d(x_i)$

Dabei zählen Schlingen doppelt.

Der Minimalgrad $\underline{d}(G)$ bzw. der Maximalgrad $\bar{d}(G)$ ist der kleinste bzw. größte vorkommende Knotengrad.

Def.: (Knotengrad in gerichteten Graphen)

Hier muss man unterscheiden, ob die Kante in einem Knoten beginnt oder ob sie dort endet (durch die Pfeilrichtung eindeutig)

$d^+(x_i)$ Ausgangsgrad : Anzahl aller in x_i beginnenden Kanten

$d^-(x_i)$ Eingangsgrad : Anzahl aller in x_i endenden Kanten

Für das Beispiel auf Blatt 79 gilt:

$d(x_1) = 3 \quad d(x_2) = 4 \quad d(x_3) = 2 \quad d(x_4) = 2$

$d(x_5) = 3 \quad d(x_6) = 0$

Def.: (zusammenhängender Graph)

Ein gewöhnlicher Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten x_i, x_k stets eine Kantenfolge (einen "Weg") von x_i nach x_k gibt.

Ein zusammenhängender Graph hat keine isolierten Knoten.

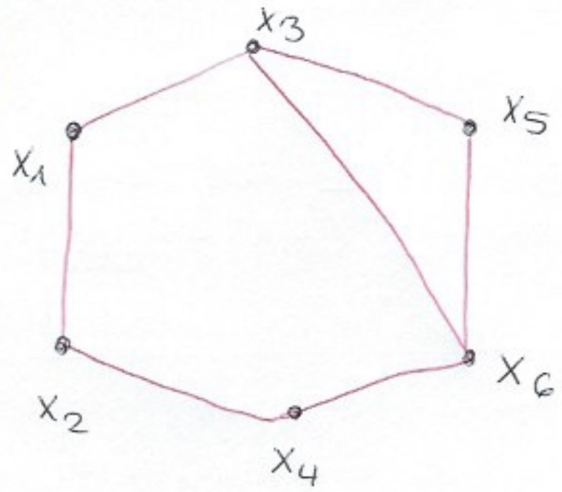
Def.: (Zusammenhangskomponente)

Die Zusammenhangskomponente $Z(x_i)$ eines Knotens x_i

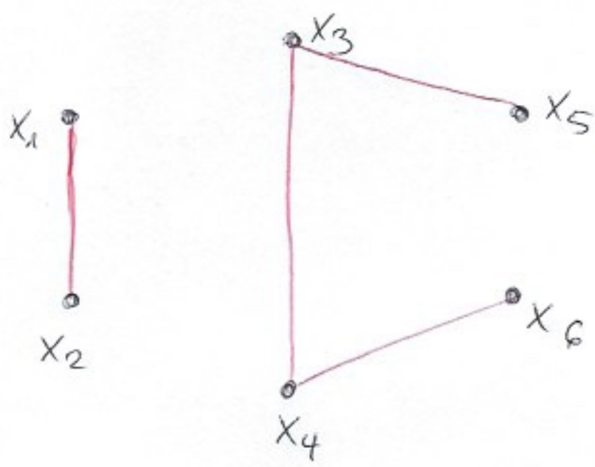
ist die Menge der Knoten x_j, für die es einen Weg von x_i nach x_j gibt.

Bem: Die Zusammenhangskomponenten eines Graphen bilden eine Klasseneinteilung der Knotenmenge.

Bp.:



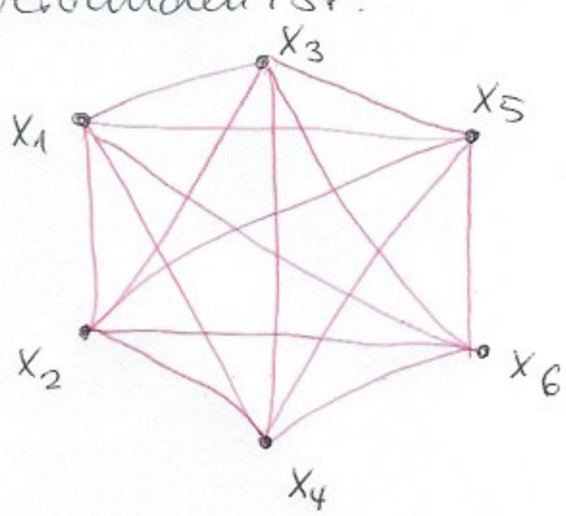
Zu je zwei Knoten x_i, x_k gibt es stets einen Weg von x_i nach x_k



Dieser Graph besitzt zwei Zusammenhangskomponenten

Def: (vollständiger Graph)

Ein gewöhnlicher Graph heißt **vollständig**, wenn jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist.

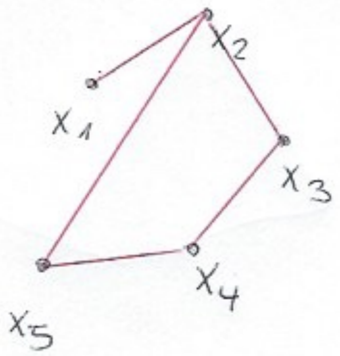


Untergraph, Teilgraph

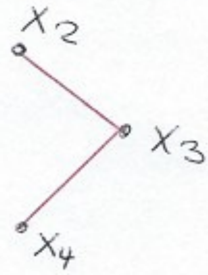
Def: (Untergraph)

Einen Untergraphen erhält man aus einem Graphen, indem man Knoten entfernt, sowie alle Kanten, die mit diesen Knoten inzidieren.

Bp.:



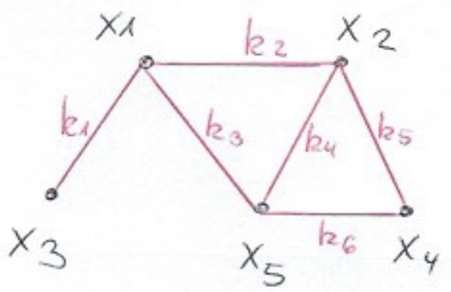
Untergraph durch Weglassen von x_1 und x_5:



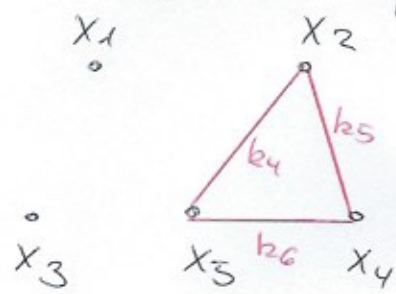
Def.: (Teilgraph)

Ein Teilgraph entsteht aus einem Graphen, indem Kanten weggelassen werden

Bp.:



Teilgraph durch Weglassen von Kante k_1, k_2, k_3



In der Praxis ist oft interessant, ob der Ausfall eines Knotens (Weglassen eines Knotens) den Zusammenhang eines Graphen aufhebt. Wäre von Bedeutung in einem Strom- oder Wasserversorgungsnetz o.ä.

Solche Knoten bekommen einen eigenen Namen:

Def.: (trennende Knoten)

Ein Knoten heißt trennend oder Artikulationspunkt, wenn nach Herausnahme dieses Knotens und der mit diesem Knoten inzidierenden Kanten der Restgraph mehr Zusammenhangskomponenten besitzt als der ursprüngliche.

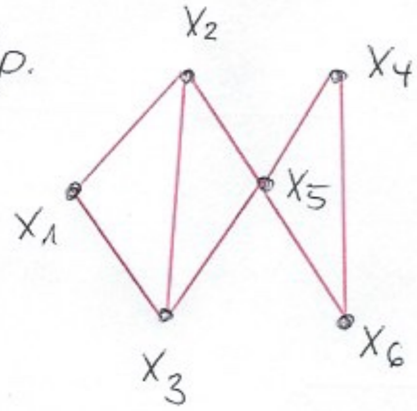
Das bedeutet für die Anwendung, dass in einem Artikulationspunkt das Versorgungsnetz besonders gefährdet ist.

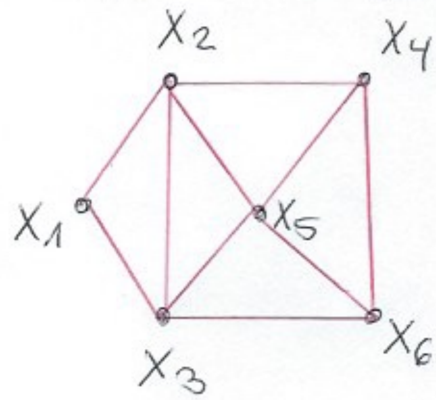
Der Restgraph wird nach Herausnahme eines Knotens sicher dann noch zusammenhängend sein, wenn vorher je zwei Knoten x_i und x_j durch mindestens zwei kreuzungsfreie Wege verbunden waren, das sind Wege, die außer x_i und x_j keinen gemeinsamen Knoten haben.

Def.: (Brücke)

Eine Kante heißt Brücke, wenn durch Entfernen dieser Kante ein nicht zusammenhängender Teilgraph entsteht

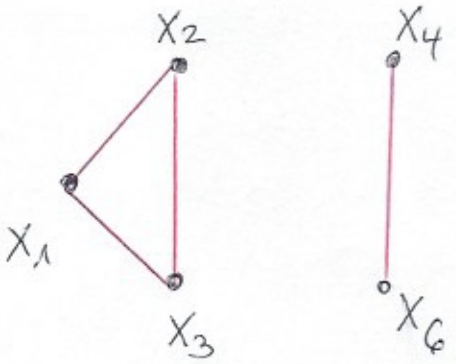
Bp.

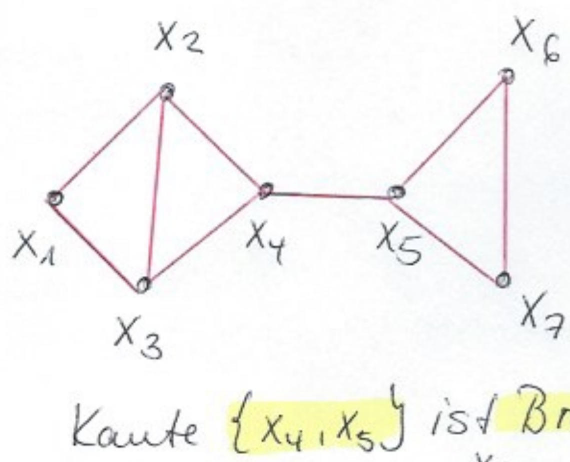




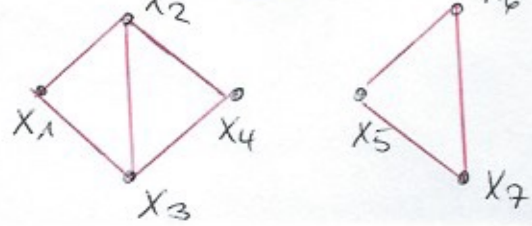
x_5 ist Artikulationspunkt

keine Artikulationspunkte vorhanden





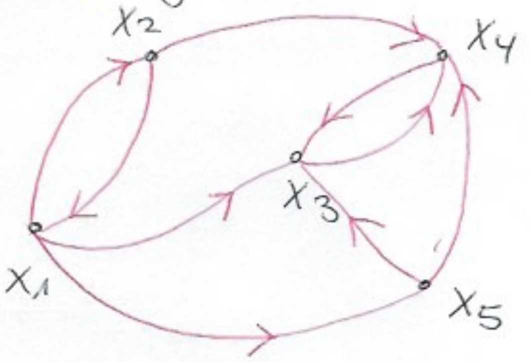
Kante $\{x_4, x_5\}$ ist Brücke



Def.: (gerichteter Graph) (s. Blatt 78)

Ein Graph, in dem jede Kante eine durch einen Pfeil markierte Richtung des "Durchlaufens" besitzt, der keine Schlingen und parallele Pfeile aufweist, der also schlicht ist, heißt **Digraph**.

Bp:



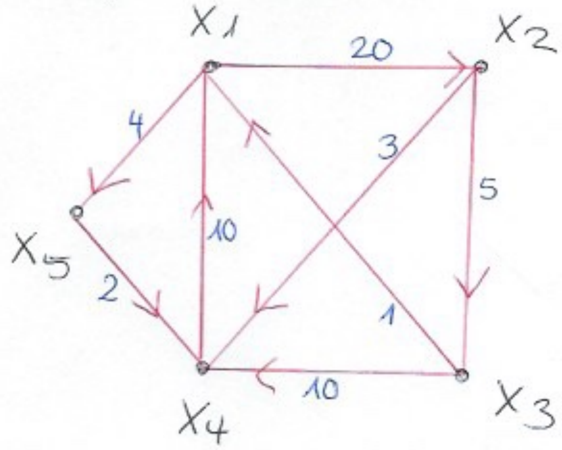
die "scheinbar" parallelen Pfeile sind nicht parallel, sie haben unterschiedliche Richtungen.

Def.: (bewerteter Graph)

Ordnet man jeder Kante $k \in K$ eines Graphen $G=(M,K,V)$ eine reelle Zahl $f(k) \in \mathbb{R}$ zu, so erhält man einen bewerteten Graphen $G' = (M,K,V,f)$. Die **Bewertungen $f(k)$ heißen Kantenwerte.** Man spricht auch von einem **gewichteten Graphen.**

So können bei einem bewerteten Graphen die Kanten Zeiten, Längen, Kosten, Kapazitäten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten etc. zugeordnet werden, je nach Anwendungsgebiet.

Bp.:



Die Kantenbewertungen werden direkt an die Kante geschrieben, der Übersicht wegen auch ohne Einheiten, diese ergeben sich aus dem Zusammenhang.

Matrizendarstellung von Graphen

Graphen sind zwar sehr anschaulich bei der Darstellung von Problemen und Fragestellungen in der Überbrückung von Raum und Zeit, wie z.B. Darstellung von Transport-wegen, Routen, Kostenplanungen, ein solcher Graph kann aber nicht so einfach in einem Computer abgebildet werden, um z.B. Optimierungsfragestellungen zu lösen.

Als eine Möglichkeit der Transformation bietet sich die Matrix an, die aus der Linearen Algebra bereits bekannt ist.

Dazu sollten die Knoten der Matrix mit einer eindeutigen Nummerierung versehen sein.

Def.: (Adjazenzmatrix)

Gegeben $G = (M, K, v)$ ungerichteter Graph mit n Knoten

Die quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ $i, j = 1, \ldots, n$

$$\text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_i x_j \text{ Kante von } G \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Adjazenzmatrix des Graphen.

Diese Definition wird für gerichtete Graphen wie folgt abgewandelt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Kante von } x_i \text{ nach } x_j \text{ geht} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Während die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen symmetrisch ist, ist es die eines gerichteten Graphen nicht mehr.

Hat man in einem ungerichteten Graphen Schlingen und Mehrfachkanten, so gilt $a_{ij} = \begin{cases} k_i, & i \neq j \text{ und } k_i \text{ Kanten } x_i x_j \\ 2k_i, & i = j \text{ und } k_i \text{ Schlingen bei } x_i \end{cases}$

Eine einzige Schlinge zählt also 2

Für bewertete Graphen gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{Bewertung von } x_i x_j & \text{wenn } x_i x_j \text{ Kante} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

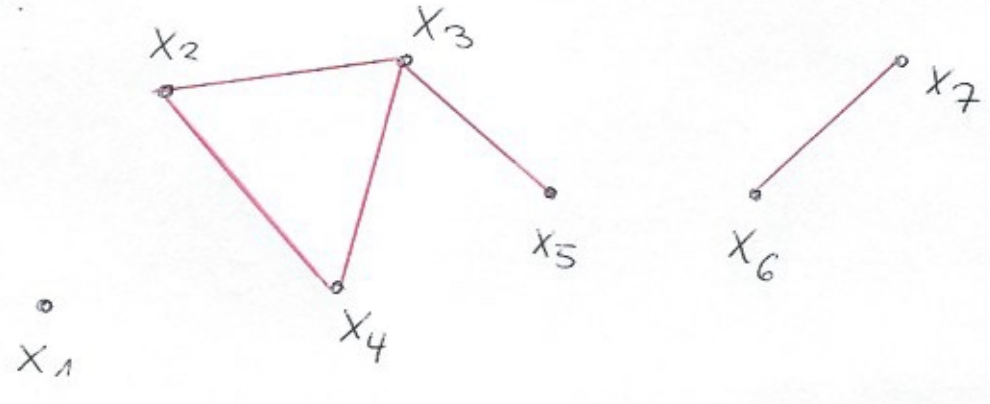
In der Adjazenzmatrix steckt die volle Information über den Graphen. Ist sie gegeben, kann man den Graphen zeichnen.

Adjazenzmatrizen ungerichteter gewöhnlicher Graphen sind symmetrisch. Bei einem schlingenfreien Graphen ergibt die Zeilen- bzw. Spaltensumme jeweils den Grad des betreffenden Knotens.

Bp.: Gegeben ist folgende Adjazenz-Matrix

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

In dieser Matrix steckt die Information für folgenden Graphen:



Eine weitere Möglichkeit, einen Graphen in einer Matrix darzustellen, ist die Inzidenzmatrix, hier müssen Knoten und Kanten fest bezeichnet sein.

Def.: (Inzidenzmatrix)

Gegeben Graph G mit Knoten x_i $i=1,\dots,n$
mit Kanten k_j $j=1\dots k$

B sei die $(n \times k)$-Matrix mit

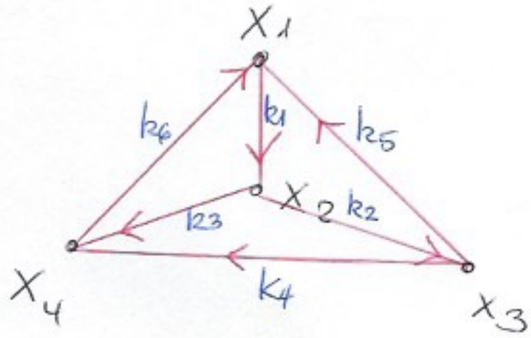
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k_j \text{ mit } x_i \text{ inzidiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Falle eines Digraphen ist

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k_j \text{ von } x_i \text{ ausgeht} \\ -1 & \text{wenn } k_j \text{ in } x_i \text{ ankommt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

B heißt die Inzidenzmatrix

Bp.:



Zugehörige Inzidenzmatrix:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Auf die Bedeutung der Adjazenzmatrizen werden wir zu einem späteren Zeitpunkt zurückkommen.