Zusammenfassung der Themen des Sommersemesters

I) Integralrechnung

Wichtige Begriffe:

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$

Das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

Folgerung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Integrationsregeln für geschlossen lösbare Integrale:

1) Partielle Integration $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

"partielles" Integral

Bp: $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx$

$$= \int x\,(x-2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Wähle: $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = (x-2)^{-\frac{1}{2}} \qquad v(x) = 2(x-2)^{\frac{1}{2}}$

$$\int \underset{u}{x}\, \underset{v'}{(x-2)^{-\frac{1}{2}}}\, dx = \underset{u}{x} \cdot \underbrace{2\cdot(x-2)^{\frac{1}{2}}}_{v} - \int \underset{u'}{1} \cdot \underbrace{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}_{v} dx$$

$$= 2x(x-2)^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2x\sqrt{x-2} - \frac{4}{3}\sqrt{(x-2)^3} + C,$$

$C \in \mathbb{R}$

2) Integration durch Substitution

Bp.: $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}\, dx$

Substituiere:

$z = x^3 + 3x$

$z' = \frac{dz}{dx} = 3x^2 + 3$

$= 3(x^2+1)$

$dz = 3(x^2+1)\cdot dx$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{\boxed{3}(x^2+1)dx}$$

"Korrekturfaktor"

$= \frac{1}{3}\ln|z| \quad \underset{\text{Rücksubstitution}}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{3}\ln|x^3+3x| + C,$

$C \in \mathbb{R}$

3) Berechnung von Rotationsvolumina

Bp.: der Graph von $f(x) = x^2+1$ rotiere im Bereich $[-1; 2]$ um die x-Achse.

Beschreiben Sie zunächst die Form des Körpers, der dabei entsteht und berechnen Sie dann das Volumen.

Form: eine ~~Art~~ Vase, die um 90° gedreht wurde

Volumenformel: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Hier: $V = \pi \int_{-1}^{2} (x^2+1)^2 dx = \pi \int_{-1}^{2} (x^4+2x^2+1) dx$

$$V = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{2}{3}2^3 + 2 - \left(\frac{1}{5}(-1)^5 + \frac{2}{3}(-1)^3 + (-1) \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{48}{5} + \frac{18}{3} \right] = \frac{78}{5}\pi \text{ VE}$$

Einschub: Hyperbelfunktionen

Bei vielen technischen Fragestellungen treten Kombinationen der Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} auf, die als Hyperbelfunktionen bekannt sind (hyperbolische Funktionen). Falls diese Funktionen Ihnen einmal in einer Klausuraufgabe begegnen sollten, hier einige wichtige Eigenschaften:

Hyperbelsinus: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Hyperbelcosinus: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

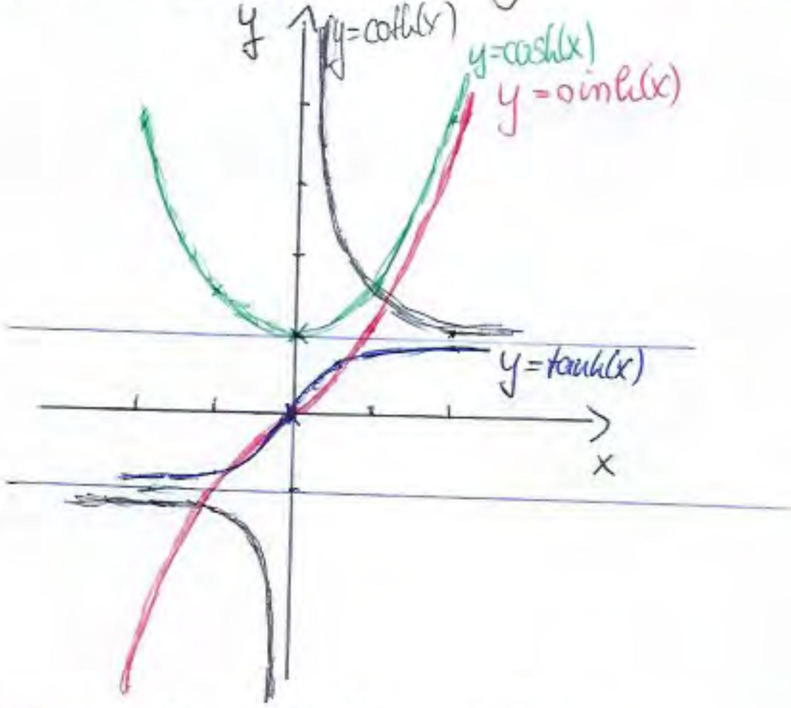
Hyperbeltangens: $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Hyperbelcotangens: $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Die Funktionswerte berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners, die meisten haben die Tasten sinh, cosh, etc.

Die Bezeichnung Sinus hyperbolicus etc. ist eine Folge der Funktionseigenschaften, die sehr ähnlich zu denen der trigonometrischen Funktionen sind.

Graphen:



Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

	$y = \sinh(x)$	$y = \cosh(x)$	$y = \tanh(x)$	$y = \coth(x)$
D_f	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$\lvert x\rvert > 0$
W_f	$-\infty < y < \infty$	$1 \le y < \infty$	$-1 < y < 1$	$\lvert y\rvert > 1$
Symm.	ungerade	gerade	ungerade	ungerade
NST	$x = 0$	keine	$x = 0$	keine
Monotonie	streng wachsend	—	streng wachsend	—
Pole	—	—	—	$x = 0$
Extrema	—	$x = 0$ (Min)	—	—

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth x = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)}$$

Bp. für eine Hyperbelfunktion: Eine an zwei gleich hohen Punkten aufgehängte Schnur wird durch die Schwerkraft in die geometrische Form einer sogenannten Kettenlinie gebracht, welche durch die Gleichung

$$y = c \cdot \cosh(ax) \qquad a, c \text{ Parameter}$$

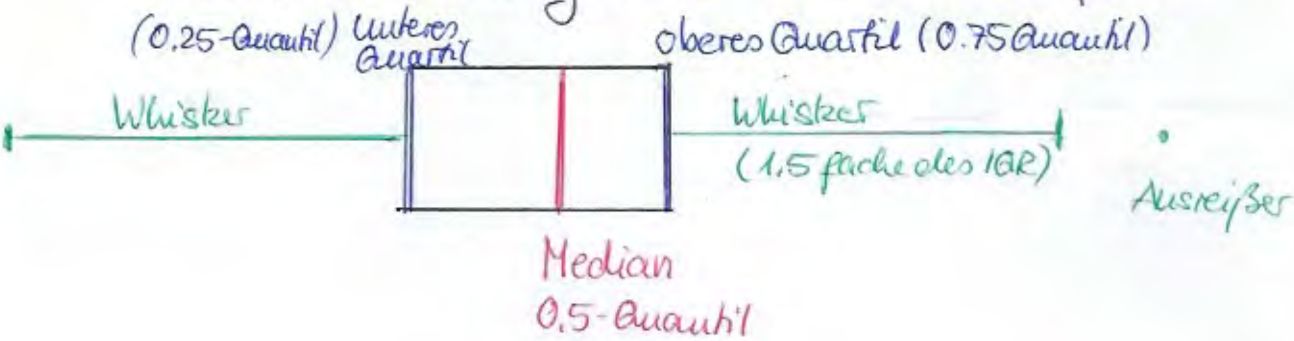
beschrieben wird.

Für Sie von Bedeutung sind die Ableitungen der Hyperbelfunktionen (eventuell mal bei Integrationsaufgaben zu verwenden)

$$y = \sinh(x) \qquad y' = \cosh(x)$$
$$y = \cosh(x) \qquad y' = \sinh(x)$$
$$y = \tanh(x) \qquad y' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$
$$y = \coth(x) \qquad y' = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

II Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

1) Visualisierung von Daten: Boxplot



2) Kombinatorische Grundlagen

$\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(Taste $\boxed{nCr}$ auf dem Taschenrechner)

Bsp: $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$ Anzahl der Möglichkeiten beim Lotto "6 aus 49" 6 Kugeln auszuwählen.

3) Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

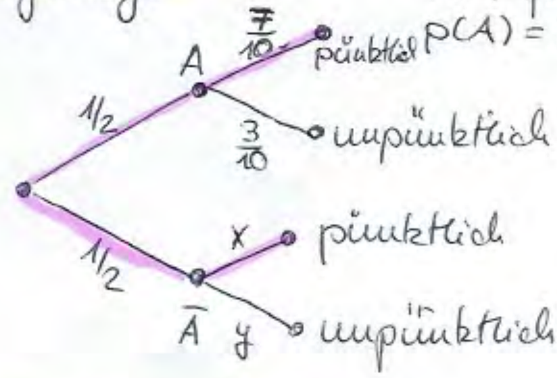
Bp: Student S fährt 50% der Semestertage mit dem Bus. In 70% dieser Fälle kommt er pünktlich an die TH. Durchschnittlich kommt er aber nur an 60% der Tage pünktlich an. Heute ist er pünktlich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er den Bus benutzt?

2 Lösungswege:

A: fährt Bus B: ist pünktlich

$p(A) = 0.5$ $p(B|A) = 0{,}7$

1)



p(pünktlich): $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1}{2}\cdot x = 0{,}6$

(Pfadwahrscheinlichkeiten addieren) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{6}{10} - \frac{7}{20} \Leftrightarrow x = \left(\frac{12-7}{20}\right)\cdot 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Das Ereignis "pünktlich" setzt sich zusammen aus "pünktlich mit Bus" und "pünktlich ohne Bus": $\frac{7}{20} + \frac{1}{4} \mathrel{\hat=} 100\%$ $\frac{12}{20} \mathrel{\hat=} 100\%$ $\frac{7}{20} \mathrel{\hat=} x\,\% \Rightarrow x = 58{,}33\%$

$\frac{7}{20} + \frac{5}{20} \mathrel{\hat=} 100\%$

2) $p(A) = 0.5$ $p(B) = 0.6$

Gesucht $P(A|B) = \frac{p(A)\cdot p(B|A)}{p(B)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}$

$= 0{,}5833$

4) Zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die Sie kennen sollten:

a) Binomialverteilung diskrete Verteilung

b) Normalverteilung stetige Verteilung

zu a) Binomialverteilung

Bp: In einer Nachrichtenübertragung wird ein Zeichen mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0.9$ richtig übertragen. Die Nachricht bestehe aus 8 Zeichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen?

Lösung: $p = 0.9 \quad q = 1 - p = 0.1 \quad n = 8$

q ist die W für: Zeichen falsch übertragen

$$P(X=0) = \binom{8}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^8 = 0.43046$$
$$P(X=1) = \binom{8}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^7 = 0.38263$$
$$P(X=2) = \binom{8}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^6 = 0.14880$$
$$0.96189$$

zu b) Normalverteilung

Bp: Die Körpergröße von Männern kann als normalverteilt angesehen werden. Für 18-20jährige ergibt sich ein Mittelwert von $\mu = 1.8\,m$ bei einer Standardabweichung von $\sigma = 7.4\,cm$

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Mann dieser Altersgruppe zwischen 1.7 und 1.9 m groß?

Lösung: $P(1.7 < X < 1.9)$

$$= \Phi\left(\frac{190-180}{7.4}\right) - \Phi\left(\frac{170-180}{7.4}\right)$$

Übergang zur Standardnormalverteilung

$$= \Phi\left(\frac{10}{7.4}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{7.4}\right)$$

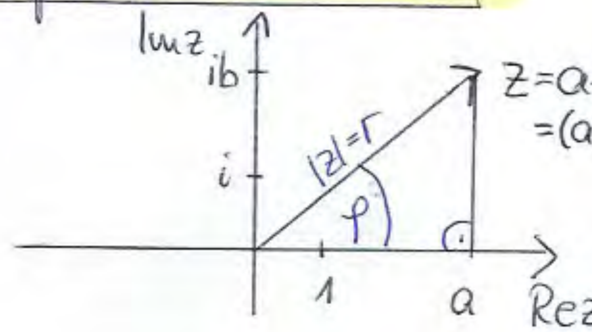
$$= \Phi(1.3513) - \Phi(-1.3513)$$

$$= \Phi(1.3513) - (1 - \Phi(1.3513)) = 2\Phi(1.3513) - 1$$

$$= 2 \cdot 0.91149 - 1 = 1.82298 - 1 = 0.82298$$

Tabelle

III Komplexe Zahlen



$z = a + ib = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$= (a,b) = r\cdot e^{i\varphi}$

$\sqrt{-1} := i \qquad a = \operatorname{Re} z \qquad r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\qquad\qquad\quad b = \operatorname{Im} z \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Achtung: auf Quadranten achten

$z = a + ib$ kartesische Form

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrische Form

$z = r\cdot e^{i\varphi}$ Exponentialform

Je nachdem, was zu berechnen ist im Bereich der komplexen Zahlen, muss eine der drei Formen gewählt werden, bzw. in eine der drei Formen umgerechnet werden.

Bp: Berechnen Sie $\left(8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\,i\right)^{\frac{1}{4}}$

andere Formulierung: Lösen Sie die Gleichung

$$z^4 = 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\,i$$

(Berechnen der vier komplexen Wurzeln)

Lösung: $r = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2} = \sqrt{256} = 16$

$$\varphi = \arctan\frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \arctan 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

4 Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{16}\cdot e^{i\frac{\pi}{16}} = 2e^{i\frac{\pi}{16}} \\ z_1 &= \sqrt[4]{16}\cdot e^{i\frac{\pi}{16}+\frac{2\pi}{4}} = 2e^{i\frac{9\pi}{16}} \\ z_2 &= \sqrt[4]{16}\cdot e^{i\frac{\pi}{16}+\frac{4\pi}{4}} = 2e^{i\frac{17\pi}{16}} \\ z_3 &= \sqrt[4]{16}\cdot e^{i\frac{\pi}{16}+\frac{6\pi}{4}} = 2e^{i\frac{25\pi}{16}} \end{aligned}\right\}$$

Umwandeln in die kartesische Form falls gefragt!

Wichtig für $\mathbb{C}$: Potenzieren, Wurzelziehen

IV Differentialgleichungen (DGL)

Sie müssen wissen:

Eine DGL ist eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion, in der zusätzlich Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Die höchste Ordnung der Ableitung, die in der Gleichung vorkommt, bestimmt die Ordnung der DGL.
Lösungsansätze werden immer irgendwie mit der Integration zusammenhängen. Für Sie von Bedeutung: linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, homogen. Der Lösungsansatz $y = A \cdot e^{\lambda x}$ führt letztendlich auf das Lösen der sogenannten char. Gleichung, einer quadratischen Gleichung.

Bp: $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0$

Ansatz: $y = A \cdot e^{\lambda x}$

char. Gleichung: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 1$$

Allg. Lösung: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{x}$

V Mehrdimensionale Analysis

Sie müssen wissen:

partielle Ableitungen 1. und höherer Ordnung

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung werden zu einem Vektor zusammengefasst.

Sie kennen die Schreibweise $\text{grad}_f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$

Bitte merken Sie sich nun doch auch folgende
Schreibweisen:

$$\text{grad}_f = \nabla f$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{etc.}$$

Übungen:

partielle Ableitungen

$$f(x,y) = 6x^2 + 5xy - 7y^2 + 3x + 2y - 13$$

$$f_x = 12x + 5y + 3$$

$$f_y = 5x - 14y + 2$$

totales Differential

$$f(x,y) = 4x^2 - 3xy^2 + x \cdot e^y$$

$$f_x = 8x - 3y^2 + e^y$$

$$f_y = 6xy + x \cdot e^y$$

$$dz = (8x - 3y^2 + e^y) \cdot dx + (6xy + (x \cdot e^y)) \cdot dy$$

$$dz = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad \text{Skalarprodukt}$$

Extremwerte

notwendige Bedingungen
hinreichende Bedingungen

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Variablensubstitution

Methode von Lagrange

Übung: Stellen Sie die Lagrangefunktion auf für folgende Fragestellung

$f(x,y,z) = x+2y-z$ Zielfunktion

$\left.\begin{array}{l} g_1(x,y,z) = x^2+y^2-8 = 0 \\ g_2(x,y,z) = x+z-4 = 0 \end{array}\right\}$ 2 Nebenbedingungen

Ansatz:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z)$$

$$= x+2y-z + \lambda_1(x^2+y^2-8) + \lambda_2(x+z-4)$$

Lösung:

$$L_x = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$
$$L_y = 2 + 2\lambda_2 y = 0$$
$$L_z = -1 + \lambda_2 = 0$$
$$L_{\lambda_1} = x^2+y^2-8 = 0$$
$$L_{\lambda_2} = x+z-4 = 0$$

VI Graphentheorie

Wichtig: Darstellung von Graphen in Adjazenz- und Inzidenzmatrizen

Graphen kreuzungsfrei zeichnen aus gegebenen Adjazenz- und Inzidenzmatrizen.